الحسبان ومبادئ التحليل

(التفاضـــل)

تأليف

د. أحمد محمد عبد المتعال

أستاذ الرياضيات الهندسية بكلية الهندسـة
جامعة فاروس الإسكندرية / جمهورية مصر العربية.

سابقا: أستاذ العلوم الرياضية والطبيعية
بجامعة الإسكندرية بجمهورية مصر العربية

ثم أستاذ الرياضيات التطبيقية بقسم الرياضيات
بجامعة الفاتح بطرابلس - ليبيا

عنـوان الكتاب: : الحسبان ومبادئ التحليل/ التفاضل

تـأليــف: : د.أحمد محمد عبد المتعال

رقم الإيداع: 2008\567

الترقيم الدولي: ISBN: 978-9959-55-041-5

📖 الطبعة الأولى 📖

2008 مسيحي

الناشر

المجموعة العربية للتدريب والنشر



8 أ شارع أحمد فخري - مدينة نصر - القاهرة - مصر

تليفاكس: 22759945 - 22739110 (00202)

الموقع الإلكتروني: www.arabgroup.net.eg

oup@yahoo.com E-mail: abgr elar

oup.net.eg abgr info@ar

الإهداء

إلى بناتي الأعزاء

نجـلاء

هبـة

حـــور

المحتويـات

الموضـــوع **الصفحة**

مقدمة

راعينا في هذا المخطوط ما يحتاج إليه طلاب الجامعات بكليات العلوم والتربية والهندسة والزراعة واحتياجات المعاهد العليا عند إعدادهم لدراسة فروع الرياضيات المختلفة والعلوم التطبيقية بصفة عامة ودعمنا الكتاب بعدد هائل من الأمثلة المحلولة المباشرة وغير المباشرة والمتدرجة تدرجا منطقيا ابتداء من المتباينات والدوال وصولا إلى المشتقة تعريفا وتطبيقا ثم القواعد الأساسية لحسبان التفاضل وتطبيقاته في رسم المنحنيات المعقدة وضمناه كثيرا من التطبيقات مثل تطبيقات القيم القصوى، وتطبيقات اقتصادية واجتماعية وعلوم حياة وتطبيقات في الديناميكا والهندسة ثم تعرضنا للتقريب الخطي والتفاضلات وطريقة نيوتن - رافسون لإيجاد الحلول التقريبية للمعادلات.

وكان هدفنا من هذا التدرج المنطقي هو بناء عقليات رياضاتية لا تجد صعوبة عند دراسة الفروع الأخرى للرياضيات البحتة والتطبيقية والمقررات الهندسية والفيزيائية أو الزراعية المتقدمة.

إن احتواء المخطوط على كم كبير من الأمثلة المحلولة وحشد ضخم من التمارين وإلحاق المخطوط بمجموعة كبيرة من التمارين العامة وأجوبتها يمكن الدارس أن يثق بمستوى تحصيله واستيعابه.

وفي الوقت الذي نتمنى من اللـه عز وجل أن نكون قد وفقنا فيما نرمي إليه من الاستجابة لطلبات الطلاب الأعزاء الراغبين في العلم والمعرفة ومن إثراء المكتبة العربية بكتب منهجية موضوعية ومرجعية بالغة العربية، فإننا نرحب بكل ملاحظة أو اقتراح أو نقد بناء من قارئ حريص على تصحيح الخطأ، فجل من لا يسهو، والعلم أخذ وعطاء.

و اللـه ولي التوفيق،،،،

المؤلف

د.أحمد محمد عبد المتعال

كلمة إلى الطالب عن أهمية الحسبان:

الحسبان هو من أهم العلوم التي ابتدعها العقل ألرياضياتي، فهو يجمع بين الأفكار التحليلية والأفكار الهندسية لتكوين أدوات قوية لحل مسائل هامة وتطوير مبادئ ذات طابع أساسي هام في الرياضيات.

اخترع الحسبان في القرن السابع عشر لدراسة مسائل في علم الحركة. فقد كنا نستخدم الجبر وحساب المثلثات في دراسة الأجسام المتحركة بسرعات منتظمة في خط مستقيم أو دائرة، إلى أن أتى الحسبان ليتغلب إذا ما كانت السرعات متغيرة أو المسار غير منتظم، فالوصف الدقيق للحركة يحتاج تعريفات دقيقة للسرعة (معدل تغير الإزاحة بالنسبة للزمن) والعجلة (معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن). ونحصل على هذه التعريفات باستعمال احد المبادئ الأساسية للحسبان ألا وهى المشتقة.

وبالرغم من أن الحسبان قد نشا لحل مسائل في الفيزياء، إلا أنه قد أصبحت كثير من العلوم المختلفة تستخدم ما للحسبان من قوة ومقدرة على تطويعه لدراسة مختلف الظواهر. إن التطبيقات الحديثة في للحسبان تشمل دراسة معدلات النمو السكاني، معرفة مقدمة لمخارج التفاعلات الكيميائية، قياس التغيرات اللحظية في التيار الكهربي، وصف سلوك الجسيمات الذرية، استكشاف العوارض الجانبية للعلاج بالإشعاع، حسابات الإرباح والخسائر الاقتصادية، فحص نواتج تآكل طبقات الأوزون، وتحليل الذبذبات في المنظومات الميكانيكية، ودراسة الشبكات الكهربية.

ويستعمل الحسبان أيضا في مسائل القيم القصوى مثل صناعة صندوق بأقل تكاليف ممكنة وبحجم معلوم، أو حساب أقصى مسافة يمكن أن بتحركها صاروخ، والحصول على الحد الأقصى للانسياب الآمن للمرور على كبري طويل، وتعيين عدد الابيار الواجب حفرها في حقل بترول للحصول على أعلى كفاءة إنتاجية، إيجاد موضع بين منبعي ضوء يكون عنده شدة الاستضاءة اكبر ما يمكن، الحصول على اكبر عائد لإنتاج معين.

وفي الرياضيات غالبا ما نستخدم المشتقات لإيجاد المماسات للمنحنيات وتحليل بيان الدوال المعقدة.

ويعرف الاشتقاق بعمليات نهايات، ولذلك فإن مصطلح النهاية هو الفكرة الأساسية التي تفصل الحسبان عن الرياضيات الأولية. هذا وقد اكتشف كل من السير إسحاق نيوتن (1642-1727) و ويليام جوتفريد ليبنز (1646-1716)، كل مستقلا عن الآخر، الربط بين المشتقات والتكامل ويرجع لهما اختراع الحسبان. وقد أضاف الكثير من علماء الرياضيات إضافات عظيمة في السنوات 350 الأخيرة.

والتطبيقات التي نوهنا إليها هنا لا تمثل إلا القليل من الكثير الذي سنتعرض إليه في هذا المخطوط.

ولا نستطيع بطبيعة الحال مناقشة كل استخدامات الحسبان والكثير الذي يظهر مع التقدم التكنولوجي المتصارع. فمهما كان مجال اهتمامك، فسوف تجد أن الحسبان مستخدما، سواء في بحث رياضي بحت أو بحث تطبيقي.

وقد تكتشف بنفسك تطبيقا جديدا لهذا الفرع من فروع المعرفة.

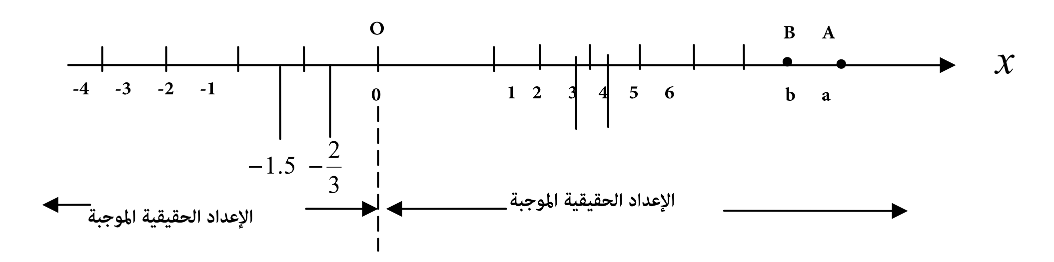
د. أحمد محمد عبد المتعال

الباب الأول

المتباينات والدوال

بند 1-1: المتباينات

إن جميع مبادئ الحسبان مبنية على خواص مجموعة الإعداد الحقيقية R. هناك تناظر أحادي بين R وبين نقط واقعة على خط الإعداد (خط الإعداد الحقيقية) كما هو موضح في شكل (1)



شكل (1)

شكل النقطة 0 نقطة الأصل وتناظر العدد 0 (صفر)، وهو ليس موجباً ولا سالباً. ويسمى العدد الحقيقي المصاحب لنقطة على خط الأعداد، إحداثي النقطة.

إذا كان a , b عددين حقيقيين فإن $a > b$ (a أكبر من b) إذا كان a-b موجباً. ويماثل ذلك $b < a$ (b أصغر من a). ومن ثم نلاحظ أن $a > b$ إذاً وفقط إذا كانت النقطة A المناظرة للعدد a تقع إلى اليمين بالنسبة للنقطة B المناظرة للعدد b. ومن الرموز الأخرى المستخدمة مع المتباينات $a \leq b$ وتعني $a < b$ أو $a = b$ وكذلك $a < b \leq c$ وتعني أن $a < b$، $b \leq c$.

ولذلك نستطيع أن نكتب على سبيل التوضيح $2 > 5$، $-2 < -4$، $0 > (-3)^2$، $.b^2 \geq 0$

ومن السهل إثبات صحة ما يلي للأعداد الحقيقية a،b، c.

1) إذا كان a > b، b > c فإن a > c

2) إذا كان a > b، فإن a + c > b + c

3) إذا كان a > b، فإن a - c > b - c

4) إذا كان a > b, c موجباً، فإن ac > bc

5) إذا كان a > b, c سالباً، فإن ac < bc

ويستطيع القارئ كتابة العلاقات المناظرة إذا ماكانت a < b ونرمز للقيمة المطلقة للعدد الحقيقي a بالرمز $|a|$ ويمكن تعريفها على النحو التالي:

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

وتعتبر $|a|$ عن المسافة بين النقطة A وبين نقطة الأصل O، ولذلك فإن المسافة بين A، B هي $|a-b|$. أيّ أن، $|5| = 5$، $|-3| = 3$، $|O| = O$، $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$، $.|-1+\pi| = \pi - 1$

عندما نكتب $A(a)$ تعني أن النقطة A احداثيتها هو a $|a|$ يمثل بعد A عن نقطة الأصل.

البعد بين النقطتين $A(-2)$ ، $B(7)$ هو

$$\begin{aligned} d_{AB} &= |a-b| \\ &= |-2-7| \\ &= |-9| = 9 \end{aligned}$$

إن البعدين A، B أو المسافة بين A، B أيْ $|a-b|$ هو عدد الوحدات بين B,A. وكذلك $|a|$ هو عدد الوحدات بين نقطة A ونقطة الأصل O. وأهم خواص القيم المطلقة هي، بفرض $(b > 0)$،

1) $|a| < b$ إذا وفقط إذا كان $-b < a < b$

2) $|a| > b$ إذا وفقط إذا كان $a > b$ أو $a < -b$

3) $|a| = b$ إذا وفقط إذا كان $a = b$ أو $a = -b$

فعندما نكتب $|a| < 3$، تعني $-3 < a < 3$

، $|a| \geq 2$ تعني $a \geq 2$ أو $a \leq -2$

تعريف : المتباينة في x هي تعبير رياضي يحتوي على الأقل واحد من الرموز >، <، $\leq$، $\geq$، مثل

$2x + x^2 > 1 - x$، $3x - 1 > \sqrt{x}$، $-5 < 2x + 1 < 10$

وعندما يقال، حل المتباينة يشبه نظيره في المعادلات. فكلمة حل المعادلة تعني إيجاد القيم الممكنة لجذور المعادلة، أما حل المتباينة يعنى ايجاد مجموعة قيم المجهول x التي تحقق المتباينة، وغالباً ما نستخدم الفترات intervals فنستعمل الترميز $\{x : .....\}$ حيث يستخدم الفضاء الذي بعد الشارحة لوصف القيود على المتغير x.

فمثلاً :

$\{x : a \leq x < b\}$ يقرأ قيم x بحيث $a \leq x < b$ وتعني مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي a ولكنها أصغر من b.

وطريقة الترميز المكافئة لهذه المجموعة بأسلوب الفترات هي $[a, b)$ القوس [يستخدم عندما يوجد $\geq$، القوس] لما $\leq$ وإذا حذفت أو = نستعمل) و(.

فمثلاً

فترة مغلقة $\{x : 2 \leq x \leq 5\} = [2,5] \rightarrow$

فترة نصف مغلقة $\{x : -2 \leq x \leq 5\} = [-2,5) \rightarrow$

فترة نصف مغلقة $\{x : --1 < x \leq 3\} = (-1,3] \rightarrow$

فترة مفتوحة $\{x : 7 < x < 11\} = (7,11) \rightarrow$

وعموماً (a,b) فترة مفتوحة، $[a,b]$ فترة مغلقة، وكل من $(a,b]$ و $[a,b)$ فترات مغلقة. إذا كان أي من a، b هو $\pm\infty$ يقال أن الفترة لانهائية (غير منتهية) أو تسمى شعاع مثل $[a,\infty)$، $(-\infty,\infty)$ وهكذا. والجدول يوضح مختلف فترات الأعداد الحقيقية والترميز المناظر وبياناتها على خط الإحداثيات (خط الأعداد).

الترميز	التعريف	بيان الفترة
(a,b)	$\{x : a < x < b\}$	a (○ ———— ○) b →
$[a,b]$	$\{x : a \le x \le b\}$	a [● ———— ●] b →
$[a,b)$	$\{x : a \le x < b\}$	a [● ———— ○ b →
$(a,b]$	$\{x : a < x \le b\}$	a (○ ———— ●] b →
(a,∞)	$\{x : x > a\}$	a (○ ————→
$[a,\infty)$	$\{x : x \ge a\}$	a [● ————
$(-\infty,b)$	$\{x : x < b\}$	———— ○) b →
$(-\infty,b]$	$\{x : x \le b\}$	———— ●] b →
$(-\infty,\infty)$	R $\{x : -\infty < x < \infty\}$	————→

جدول (1) الفترات :   النقطة المجوفة ≡ ○ مفتوحة ≡) أو (

النقطة المغلقة ● ≡ مغلقة ≡] أو [

مثال (1)

حل المتباينات الآتية ثم وضح بيان الحل .

أ) $\frac{3-2x}{5} < 1$ ب) $\frac{3x+2}{13} \ge \frac{11}{26}$

جـ) $-5 \le \frac{4-3x}{2} < 1$ د) $x^2 - 14 > 5x$

الحل

أ) $\frac{3-2x}{5} < 1$

بالضرب في (5)،

$$3-2x < 5$$

اطرح (3)

$$-2x < 2$$

اقسم على (2)

$$-x < 2$$

اضرب في (1-) فتصبح علامة التباين، إذن

$$x > -2$$

مجموعة الحل هي $x : x > -2$، هي الفترة $(-2, \infty)$

وبيان الحل هو شكل (2)

-2 0

شكل (2)

ب) $\frac{3x+2}{13} \geq \frac{11}{26}$

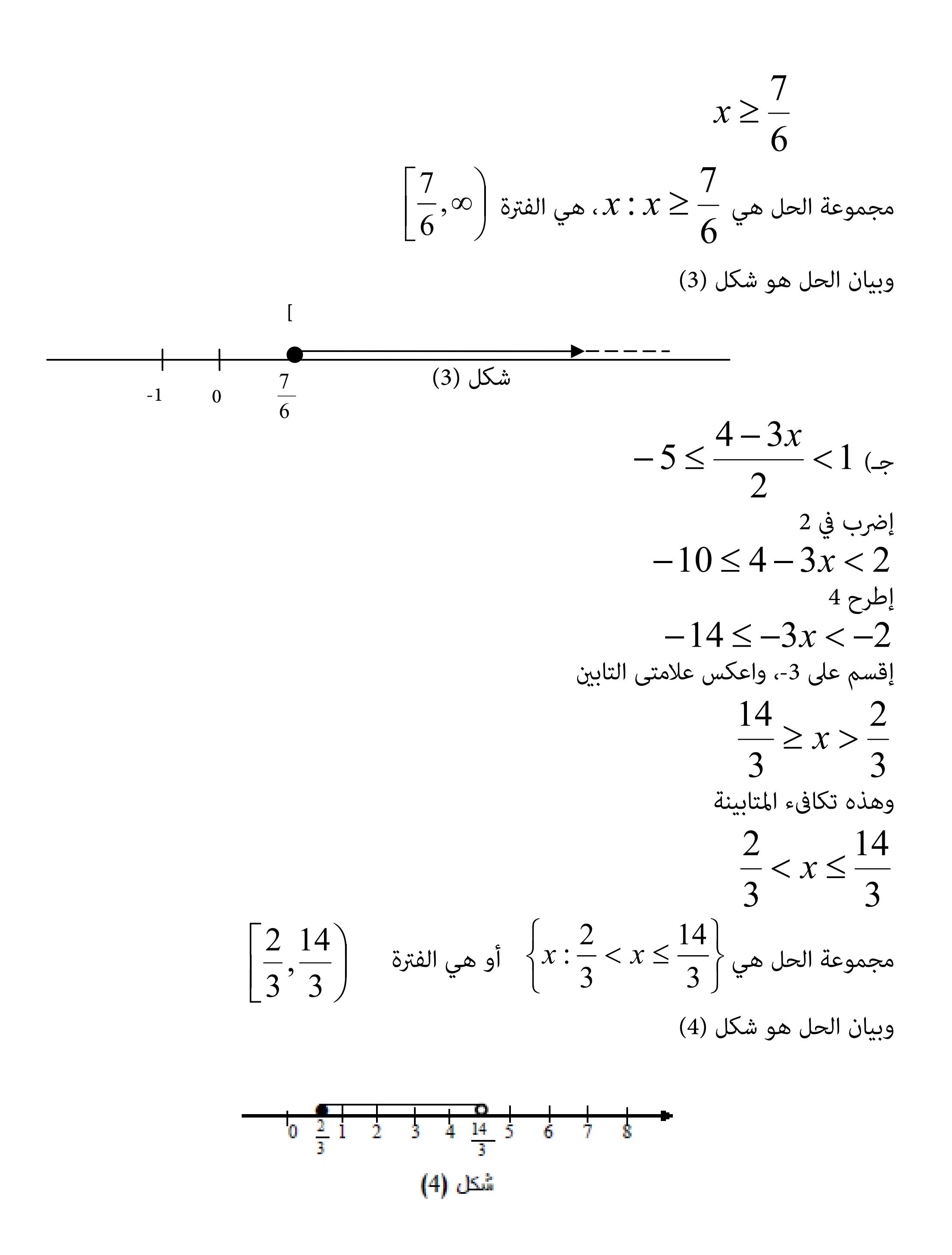
إضرب في 26

$$6x+4 \geq 11$$

إطرح 4،

$$6x \geq 7$$

إقسم على 6



$$x \geq \frac{7}{6}$$

مجموعة الحل هي $x : x \geq \frac{7}{6}$، هي الفترة $\left[\frac{7}{6}, \infty\right)$

وبيان الحل هو شكل (3)

شكل (3)

جـ) $-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1$

إضرب في 2

$$-10 \leq 4 - 3x < 2$$

إطرح 4

$$-14 \leq -3x < -2$$

إقسم على 3-، واعكس علامتى التابين

$$\frac{14}{3} \geq x > \frac{2}{3}$$

وهذه تكافىء المتابينة

$$\frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$$

مجموعة الحل هي $\left\{x : \frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}\right\}$ أو هي الفترة $\left[\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$

وبيان الحل هو شكل (4)

شكل (4)

د) $x^2 - 14 > 5x$

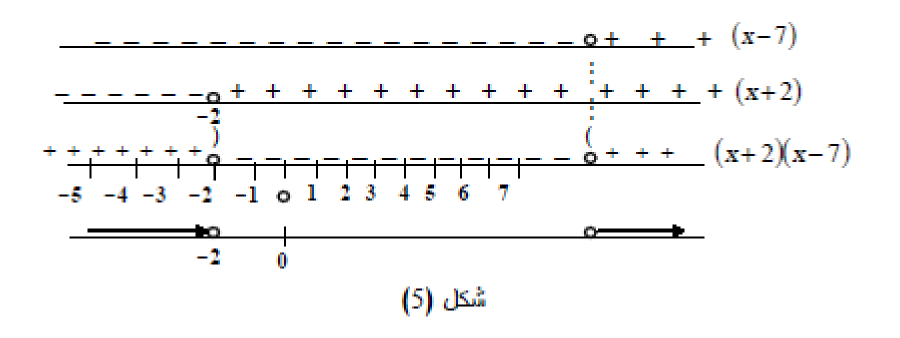
إطرح $5x$

$$x^2 - 5x - 14 > 0$$

حلل لعوامل الدرجة الأولى

$$(x-7)(x+2) > 0$$

نفحص بعد ذلك إشارتي العاملين $x-7$ و $x+2$ كما هو موضح في شكل (5)



شكل (5)

إذن مجموعة الحل هي $\{x : x < -2 \quad or \quad x > 7\}$ أو هو اتحاد الفترتين $(-\infty, -2) \cup (7, \infty)$

مثال(2)

حل المتباينة ووضح بيانها

أ) $\dfrac{3}{x+2} \le \dfrac{4x}{x+3}$

ب) $\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)^2 < \dfrac{25}{4}$

الحل

أ) $\frac{3}{x+2} \le \frac{4x}{x+3}$

إطرح $\frac{4x}{x+3}$ ،

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4x}{x+3} \le 0$$

وحد المقام

$$\frac{3(3+x) - 4x(x+2)}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

إختصر،

$$\frac{3x + 9 - 4x^2 - 8x}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

$$\frac{-4x^2 - 5x + 9}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

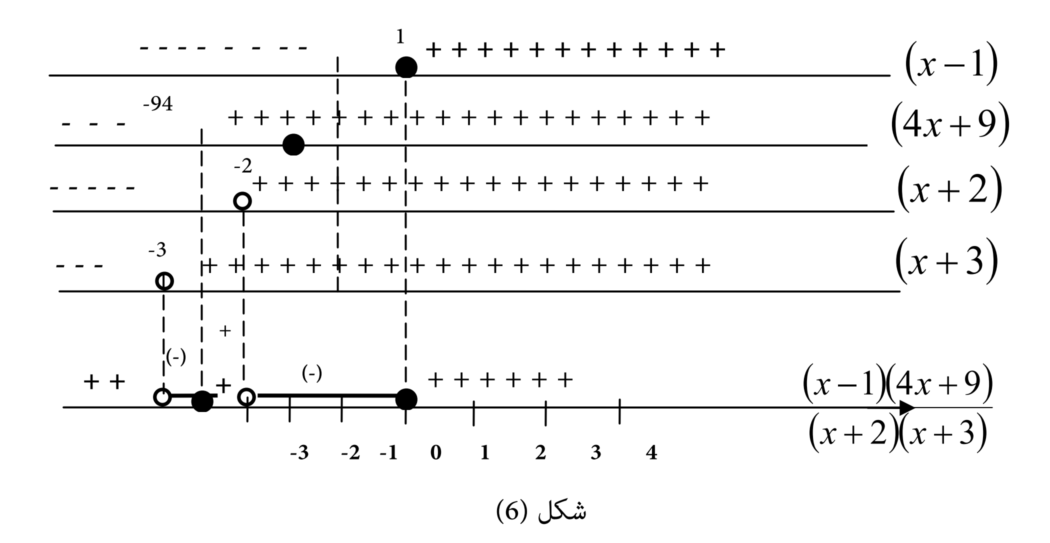
اضرب في (-1) مع عكس إشارة التباين

$$\frac{4x^2 + 5x - 9}{(x+2)(x+3)} \ge 0$$

حلل إلى عوامل الدرجة الأولى

$$\frac{(x-1)(4x+9)}{(x+2)(x+3)} \ge 0$$

افحص إشارة كل عامل في البسط والمقام (شكل 6)



شكل (6)

يلاحظ أنه عند فحص إشارة عوامل المقام أخذنا في الاعتبار أن $x \neq -2$ ، $x \neq -3$ لذلك استعملنا النقط الجوفاء مع عوامل المقام رغم أن إشارة المتباين تحتوي أو = .

بعد ذلك عملية ضرب أو قسمة 4 عوامل تكون موجبة عندما تكون كل العوامل الأربعة موجبة أو كلها سالبة أو اثنان موجبان واثنان سالبان . وتكون العملية سالبة لغير ذلك .

إذن بحثنا أين يكون الكسر موجباً أو = صفر وبذلك نجد أن مجموعة الحل هي،

$$\{x : x \geq 1\} \quad \text{أو} \quad \left\{x : -\frac{9}{4} \leq x < -2\right\}$$

وفترة الحل هي

$$\left[-\tfrac{9}{4}\ ,\ 2\right) \cup [1\ ,\ \infty)$$

ب)
$$\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$$

بأخذ الجذر التربيعي مع الأخذ في الاعتبار أن،

$$\sqrt{a^2} = \pm a = |a|$$

نجد أن،

$$\left|\frac{2x}{x-1}\right| \le \frac{5}{2}$$

إذن

$$-\frac{5}{2} \le \frac{2x}{x-1} \le \frac{5}{2}$$

ويستحسن هنا تحويلها إلى متباينتان أنيتان،

$$\frac{2x}{x-1} \ge -\frac{5}{2} \quad \text{و} \quad \frac{2x}{x-1} \le \frac{5}{2}$$

المتباينة الأولى، بطرح $\frac{5}{2}$

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{5}{2} \le 0$$

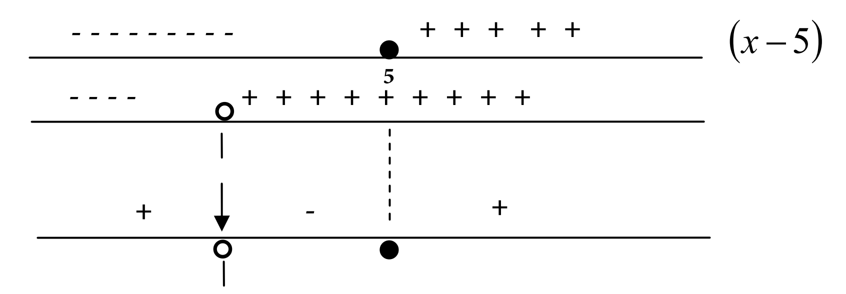
$$\frac{4x - 5(x-1)}{2(x-1)} \le 0$$

$$\frac{-x+5}{2(x-1)} \le 0$$

أضرب في 2- مع تغيير علامة التباين،

$$\frac{x-5}{x-1} \ge 0$$

ونفحص إشارتي البسط والمقام مع حذف $x = 1$، (شكل 7)



شكل (7)

إذن فترة الحل هي $(-\infty,1)\cup[5,\infty)$

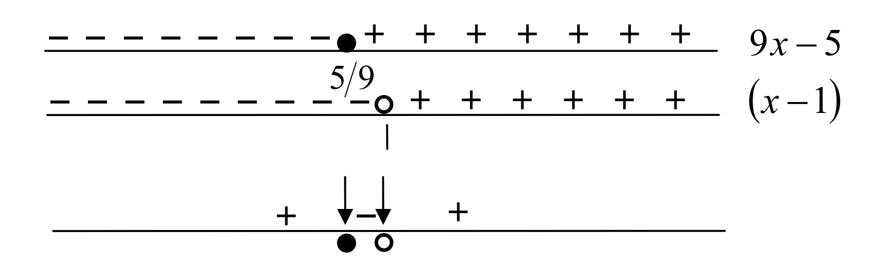
المتباينة الثانية،

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{5}{2}\geq 0$$

$$\frac{4x+5(x-1)}{2(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{9x-5}{2(x-1)}\geq 0$$

وفحص إشارتي البسط والمقام مع حذف ، (شكل 8)



شكل (8)

إذن فترة الحل هي $(-\infty,5/9)\cup[1,\infty)$

والحل الذي يحقق المتباينتان الأولى والثانية آنيا هو تقاطع الحلين أي

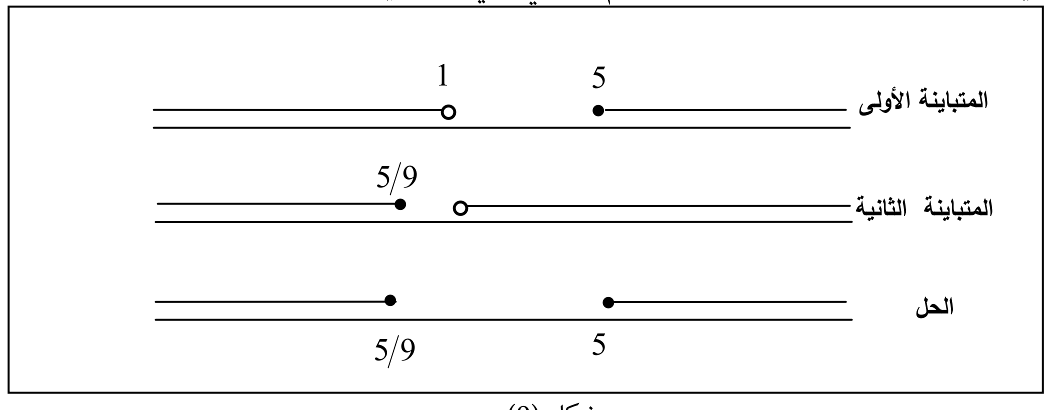
$$(-\infty,1)\cup[5,\infty)\cap(-\infty,5/9]\cup(1,\infty)$$

أيْ $\left(-\infty, 5/9\right] \cup \left[5, \infty\right)$

وبذلك يمكن كتابة مجموعة الحل،

$$\{x : -\infty < x \leq 5/9 \text{ أو } 5 \leq x < \infty\}$$

ويمكن استنباط الحل بيانياً (شكل 9) برسم نتيجتي بياني المتباينتين .



شكل (9)

مثال (3)

حل المتباينات

أ- $|x-3| < 1$

ب- $|3x-5| \geq 4$

جـ- $|x^2 - 3x| > 0$

د- $|x-2| < 0$

هـ- $|x^2 - 3x| \geq 4$

و- $|x^2 + 1| > -2$

الحل

أ) $|x-3| < 1$

إذن $-1 < x - 3 < 1$

إجمع 3،

$$2 < x < 4$$

مجموعة الحل $\{x : 2 < x < 4\}$ أو هو الفترة $(2,4)$

وبيانها شكل (9)

-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

شكل (9)

ب) $|3x - 4| \geq 4$

إذن، $3x - 4 \geq 4$ أو $3x - 4 < -4$

أضف 4،

$$3x \geq 8 \quad \text{أو} \quad 3x \leq 0$$

$$x \geq \frac{8}{3} \quad \text{أ،} \quad x \leq 0$$

مجموعة الحل، $\left\{x : x \geq \frac{8}{3} \text{ أو } x \leq 0\right\}$

أو هي $\{x : x \leq 0\} \cup \left\{x : x \geq \frac{8}{3}\right\}$

وفترة الحل هي $\left[\frac{8}{3}, \infty\right) \cup (-\infty, 0]$

وبيان الحل بشكل (10)

-3 -2 -1 0 1 2 $\frac{8}{3}$ 3 4 5

شكل (10)

جـ) $|x^2 - 3x| > 0$

القيمة المطلقة موجبة دائماً مهما كانت x الحقيقية إذن مجموعة الحل هي R

د) $|x-2|<0$

القيمة المطلقة لا يمكن أن تكون سالبة مهما كانت x الحقيقية إذن مجموعة الحل هي ϕ (المجموعة الخالية)

هـ) $|x^2-3x|\geq 4$

إذن $x^2-3x\geq 4$ أو $x^2-3x\leq -4$

$x^2-3x-4\geq 0$ أو $x^2-3x+4\leq 0$

جذري المعادلة، $x^2-3x-4=0$ هما

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=-1,4$$

أما المعادلة، $x^2-3x+4=0$

مميزها $b^2-4ac=9-16=-7$

وجذريها تخيليان لذلك فإن المقدار $x^2-3x+4=0$

يحمل دائماً إشارة x^2 أي موجب دائماً ولذلك فإن المتباينة اليسرى ليس لها حل حقيقي بمعنى أم مجموعة حلها هي ϕ .

أما المتباينة اليمنى $x^2-3x-4\geq 0$

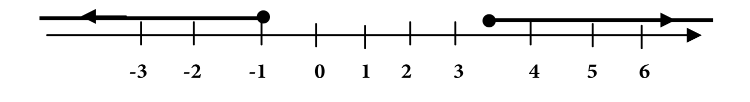
$$(x+1)(x-4)\geq 0$$

فإن مجموعة الحل هي $\{x : x\leq -1$ أو $x\geq 4\}$

أو يكتب $\{x : x\geq 4\}\cup\{x : x\leq -1\}$

أو الفترة $(-\infty,-1]\cup[4,\infty)$

والبيان في شكل (11)



شكل (11)

تمارين (1-1)

1) إختصر المقدار

(أ) $(-3)|2-4|$ (ب) $|-8|/(-2)$ (جـ) $\dfrac{|x-2|}{x-2}$

(د) $|\sqrt{5}-3|$ (هـ) $|2-\sqrt{2}|$ (و) $\left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right|$

(ز) $5/|-2|$ (ح) $|x-3|$ و $x>3$

(ط) $|3-\pi|$ (ك) $|x+7|$ و $x\geq -7$

2) حل المتباينة وأوجد مجموعة الحل على صورة فترة ومثله بيانياً

(أ) $3x-1\geq 2$ (ب) $4-x<1$ (جـ) $2x+5<3x-7$

(د) $x-8>5x+3$ (هـ) $3\leq\dfrac{2x-3}{5}<7$ (و) $x^2-x-6<0$

(ز) $-2<\dfrac{4x+1}{3}\leq 0$ (ح) $x^2+4x+3\geq 0$ (ط) $x^2-3x+9>0$

(ك) $x^2-2x-5>2$ (ل) $x^2-4x-17\leq 4$ (م) $x(2x+3)\geq 5$

(ن) $x(3x-1)\leq 4$ (س) $\dfrac{x+1}{2x-3}>2$ (ي) $\dfrac{x-2}{3x+5}\leq 4$

3) أوجد فترة حل المتباينة

(أ) $\dfrac{1}{x-2}\geq\dfrac{3}{x+1}$ (ب) $\dfrac{2}{2x+3}\leq\dfrac{2}{x-5}$

(جـ) $|x+3|<2$ (د) $|x-4|\leq 0.3$

(هـ) $|2x+5|<4$ (و) $|3x-7|\geq 5$

4) **حل المتباينة الآتية :**

(أ) $-\frac{1}{5} < \frac{7-2x}{5} < \frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{x} \geq 3$

(جـ) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$ (د) $\left|x^2 - 1\right| > 3$

(هـ) $\left|x^2 - 11x\right| \geq 0$ (و) $\left|x^2 + x - 1\right| < 0$

5) **حل المتباينات :**

(أ) $21 + \sqrt{x-2} > 23$ (ب) $|x-2| \geq |x+1|$

(جـ) $|x-2| \geq x+1$ (د) $x - 2 \leq |x+1|$

(هـ) $x - 2 \geq |x+1|$ (و) $\frac{x+1}{|x-1|} > 1$

(ز) $\left|\frac{H-50}{5}\right| \leq 1.6$ **حيث** : (i) $H > 50$. (ii) $H < 50$.

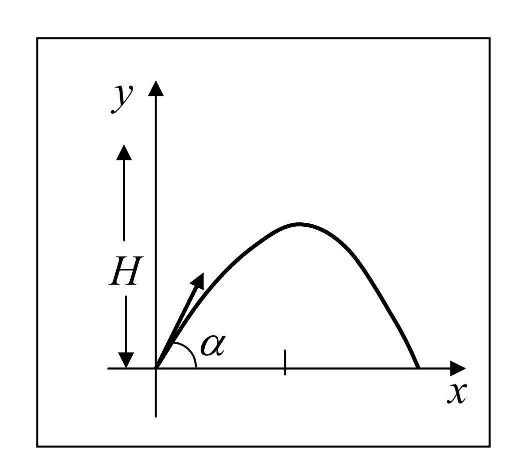
6) أطلقت قذيفة من سطح الأرض
بسرعة u تميل على الأفقي بزاوية α .
فتحركت على المسار، (شكل 12)

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx}{2u^2\cos^2\alpha}$$

فكان أقصى ارتفاع لها هو H .

أ) استعمل المتباينة

$$y \leq H$$



شكل (12) : تمرين 6

لإيجاد العلاقة بين H، u، α باعتبار g عجلة الجاذبية مقداراً ثابتاً .

ب) أوجد قيم x التي تكون القذيفة عندها على ارتفاع أكبر من $H/2$.

7) حل المتباينات

(أ) $x^2 > x + 2$

(ب) $|x| > x + 2$

(جـ) $|x| > |x + 2|$

(د) $x > |x + 2|$

(هـ) $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} \leq \frac{10}{3}$

(و) $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 2$

(ز) $|x| + |x - 1| \geq 1$

(ح) $|x - 3| + |x - 2| \leq 4$

8) إذا كانت a، b، c أعداد حقيقية موجبة ، $0 < b < a < c$، أثبت أن مجموعة الحل للمتباينة $|x - a| + |x - b| < c$

هي الفترة،

$$\left(\frac{a+b-c}{2}, \frac{a+b+c}{2}\right)$$

9) أثبت أن المقدار $|x| + |x - c|$ ثابت في الفترة $[0, c]$.

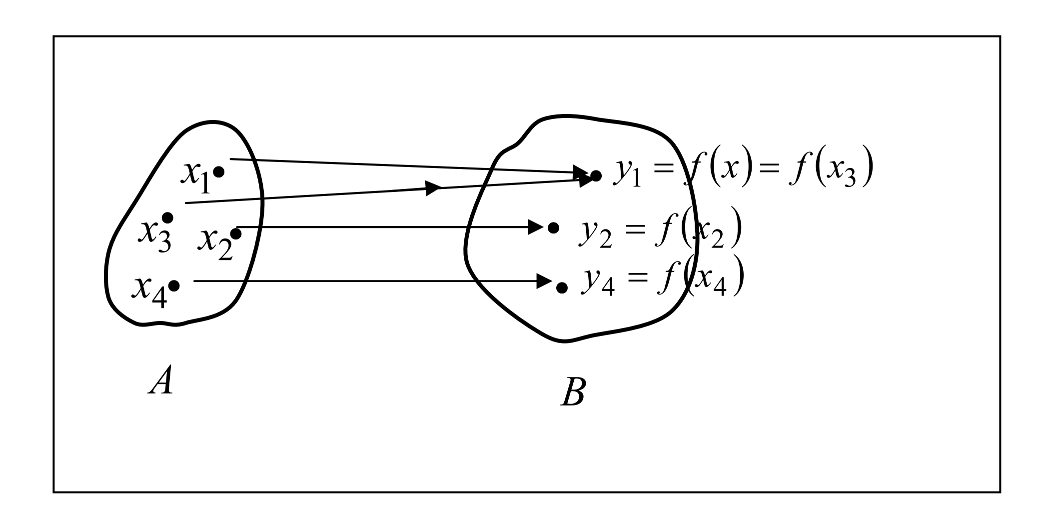
بند 1-2: الدوال

من التعريفات الأساسية الهامة في الحسبان هو الدالة . فطالما درسنا تأثير تغير كمية معينة على كمية متغيرة أخرى . مثل تأثير تغيير سرعة الرياح على درجة حرارة الجو أو تأثير مقياس النبض على مقياس ضغط الدم وهكذا . هذا إذا كانت الكمية الثانية تعتمد فعلاً على الكمية الأولى . فإذا كان تغيير كمية x يتبعه تغيير في كمية y فإننا نستطيع توظيف الكمية x لإعطاء معلومات عن y .

ونقول أن y دالة في x بمعنى أن x تدل على y .

تعريف : الدالة

"دالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي تناظر يعين، لكل عنصر x في المجموعة A ، عنصراً وحيداً y في المجموعة B".



شكل (13)

العنصر y في B هو قيمة f عند x ويرمز له $f(x)$ "f of x" أ، "دالة x".
المجموعة A هي نطاق الدالة والمجموعة B هي النطاق المساعد

للدالة f، أما مدى f فهو المجموعة الجزئية، من النطاق المساعد B، التي تتكون من القيم الممكنة للدالة $f(x)$ المناظرة لقيم x في A.

أحياناً ما نصف الدوال برسم كالموضح في شكل (13)، حيث مثلنا المجموعتين A، B بنقط داخل منطقتين في المستوى.

أما الأقواس المنحنية فتوضح أن العناصر $f(x_1)$، $f(x_2)$، $f(x_3)$ و$f(x_4)$ في B تناظر العناصر x_1، x_2، x_3 و x_4 على الترتيب في A. يجب أن نتذكر دائماً أن لكل عنصر x في A عنصر واحد فقط يناظره $f(x)$ في B. قد يحدث أن عنصرين مختلفين في A مثل x_1, x_3 لهما نفس قيمة الدالة $y_1 = f(x_3) = f(x_1)$، في B.

تعريف : الدالة الأحادية

نقول أن f دالة أحادية أو "واحد – لواحد" إذا كان $f(x) \neq f(y)$ طالما أن $x \neq y$.

الدالة الموضحة في شكل (13) ليست أحادية، لأن $f(x_1) = f(x_3)$ بينما $x_1 \neq x_3$.

الدالة الأحادية تعين كل عنصر x في A عنصراً وحيداً $f(x)$ في B والعكس كل عنصر $f(x)$ في y يناظره عنصراً وحيداً x في A.

عادة ما نعرف دالة f بكتابة تعبير جبري أو قاعدة لإيجاد $f(x)$ مثل $f(x) = 2x + 3$ أ، $f(x) = \sqrt{3x - 2}$. أو نقول أن $f(x)$ هي ضعف مربع x أ، $f(x)$ هي الجذر التربيع للفرق بين العدد 5 و x. وهكذا.

فمثلاً : إذا أعطينا $f(x) = \sqrt{x - 2}$ ، ونعلم أن يفترض أن يكون مجموعة العناصر الحقيقية التي تحقق شرط البقاء على $f(x)$ حقيقية، إذن $x - 2 \geq 0$ تعطي $x \geq 2$ ونستنتج أن النطاق هنا هو الفترة $[2, \infty)$، فإذا

رمزنا لنطاق $f(x)$ بالرمز D_f $(Domain\ \ of\ \ \ f)$، فإن $D_f=[2,\infty)$.

ويجب تذكر أن إذا كان x تنتمي إلى D_f (أيْ $x\ \in\ D_f$) نقول أن f معرَّفة عند x أو أن $f(x)$ موجودة .

إذا كانت c هي مجموعة جزئية من النطاق فلابد أن f معرَّفة على c

فمثلاً في حالة $f(x)=\sqrt{x-2}$، $D_f=[2,\infty)$ فإن f معرفة في $A=[2,\infty)$ وفي $S_1=(2,5)$ أ، $S_2=(4,\infty)$ وهكذا لأن كل من S_1، S_2 مجموعتان جزئيتان من A.

أما مصطلح f غير معرَّفة عند x فيعني أن x ليست في نطاق f أ، $x\notin D_f$.

فمثلاً عندما $x=1$، $f(1)=\sqrt{-1}$ وهو عدد غير حقيقي ونقول أن $f(1)$ غير معرفة لأن $x=1$ لا تنتمي إلى D_f .

مثال (1)

إذا كانت $$f(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{x+1}$$

أ) أوجد D_f

ب) أوجد $f(-6)$، $f(2)$، $f(x+3)$، $f(x-1)$

الحل

أ) لإيجاد D_f، يجب أن تكون $f(x)$ عدد حقيقي معرف وهذا يحدث فقط إذا كان، المقدار تحت الجذر موجباً أو يساوي صفر والمقام لا يساوي صفر

أي $x+1\neq 0$ ، $3-x\geq 0$

$$-x\geq -3$$

$$x\neq -1\quad x\leq 3$$

إذن $D_f = (-\infty,-1)\cup(-1,3]$

ب) $f(-6) = \dfrac{\sqrt{3-(-6)}}{-6+1} = \dfrac{\sqrt{9}}{-5} = -\dfrac{3}{5}$

$$f(2) = \frac{\sqrt{3-2}}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$f(x+3) = \frac{\sqrt{3-(x+3)}}{2+1} + \frac{\sqrt{-x}}{x+4}$$

(يلاحظ أن $x \in D_f$ ، $x+3 \in D_f$

تؤدي إلى أن $x \in D_f - 3$

أيْ $D_{f(x+3)} = (-\infty,-4)\cup(-4,0]$

أيْ أن نطاق هذه الدالة، $f(x+3)$ ، هي جميع الأعداد الحقيقية السالبة ماعدا $x = -4$،
قد نكتبها، $\overline{R} - \{-4\}$)

$$f(x-1) = \frac{\sqrt{3-(x-1)}}{x-1+1} + \frac{\sqrt{4-x}}{x}$$

(ونطاق هذه الدالة هو

$$D_{f(x-1)} = D_f + 1$$

$D_{f(x-1)} = (-\infty,1)\cup(1,4]$)

تعريف : خارج قسمة الفرق difference quotient

إذا كانت f دالة معلومة فإن خارج قسمة الفرق يعرَّف
على النحو

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$$

وسوف نرمز له بالترميز $f(x,h)$ لأنه سيكون دالة في كل من x و h .

مثال (2)

أوجد خارج قسمة الفرق $f(x,h)$ للدوال الآتية في أبسط صورة .

أ) $f(x)=x^2$ ب) $f(x)=x^2+6x$ جـ) $f(x)=\frac{1}{x}$

الحل

أ)

$$\begin{aligned} f(x,h) &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} \\ &= \frac{2hx+h^2}{h} = 2x+h \end{aligned}$$

ب)

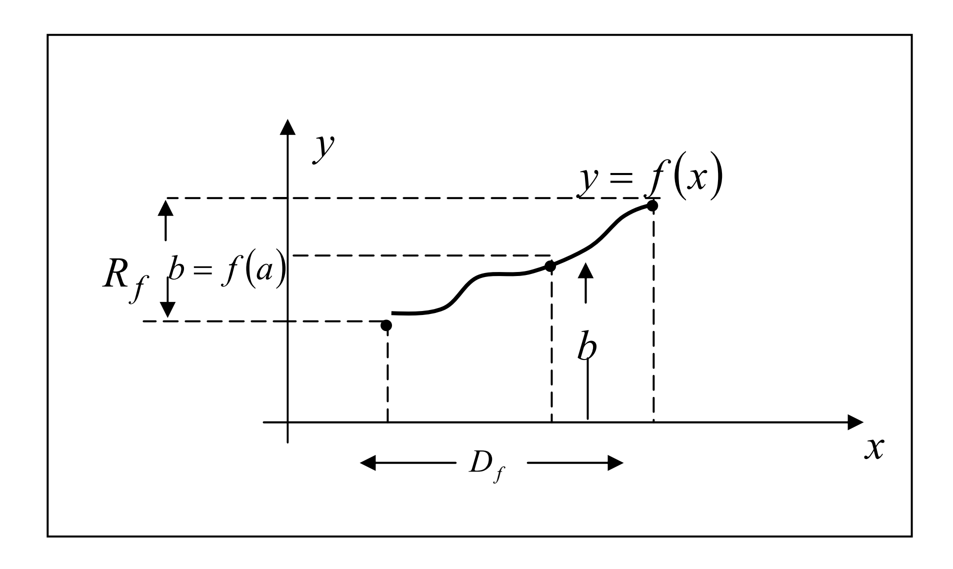
$$\begin{aligned} f(x,h) &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h} + 6\frac{(x+h)-x}{h} \\ &= 2x+h+6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,h) &= \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x^2+hx} \end{aligned}$$

(نلاحظ أنه في (ب) استعملنا أنه إذا كان $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ فإن، $f(x,h)=f_1(x,h)+f_2(x,h)$ على القارئ إثبات ذلك).

إذا كانت f دالة معلومة فمن الممكن استخدام الرسم لتوضيح التغيير في قيمة الدالة كلما تغيرت x خلال D_f.

وبيان الدالة f بنطاق D_f هو بيان المعادلة $y = f(x)$ لقيم x في D. ويقصد بالبيان مجموعة النقط $(x, f(x))$، حيث $x \in D_f$. والعكس إذا كانت نقطة مثل $p(a,b)$ تقع على البيان فإن الإحداثي y أيْ b هو قيمة الدالة $f(a)$. وشكل (14) يصور بيان f ويوضح النطاق والمدى (عادة نرمز لمدى الدالة f بالرمز R_f " Range of f ") . في هذا الشكل يتضح أن D_f ، R_f فترتان مغلقتان . في أمثلة أخرى قد يكونا مفتوحتان أو لا نهائيتان أو غير ذلك من مجموعات الأعداد الحقيقية .

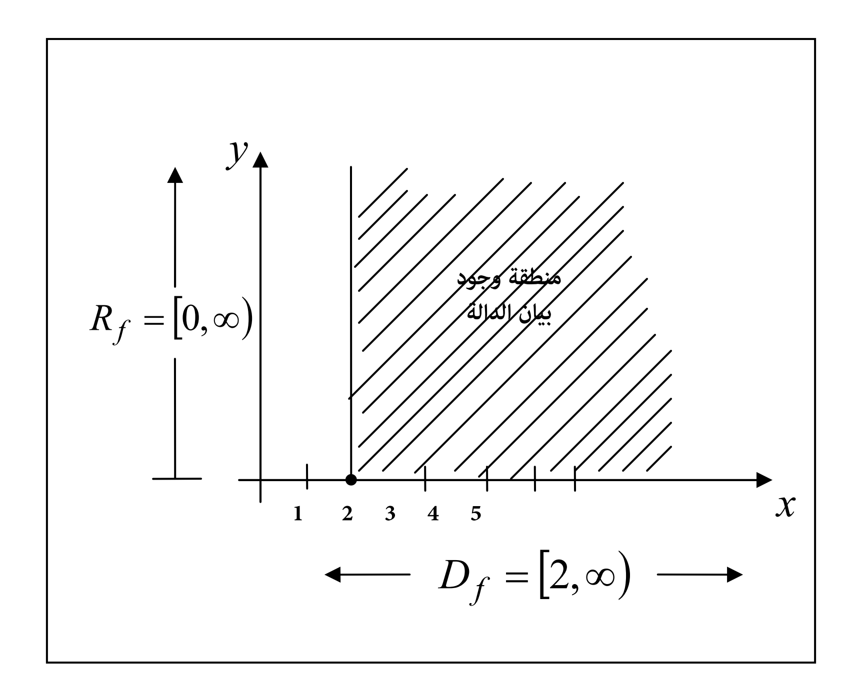


شكل (14)

فإذا اعتبرنا الدالة $f(x) = \sqrt{x-2}$ كمثال، نجد أن $y = \sqrt{x-2}$ ، $D_f = [2, \infty)$ ولإيجاد R_f نجد أن y موجبة دائماً كذلك بكتابة $x = 2 + y^2$، نجد أنه لا يوجد قيود أخرى على y .

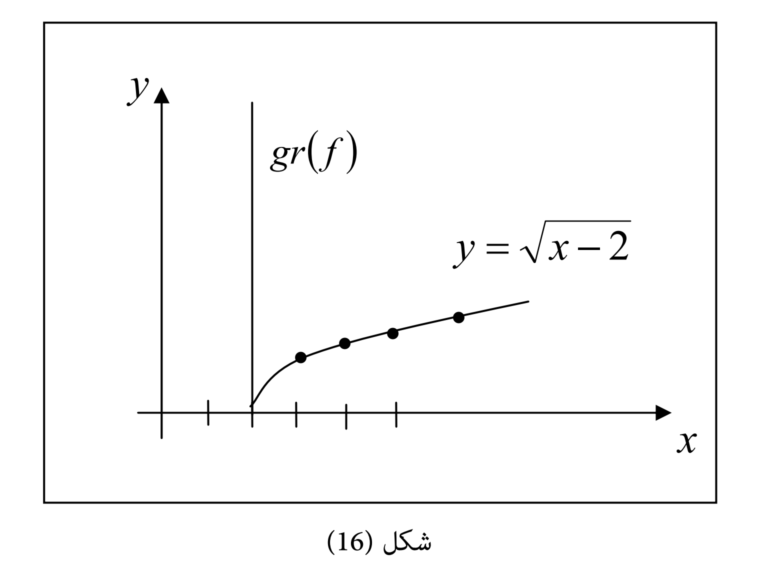
لذلك فإن y حقيقية موجبة، $R_f = [0, \infty)$ وشكل (15) يوضح منطقة وجود بيان الدالة .

شكل (16) يوضح البيان، $gr(f)$.



y
منطقة وجود
بيان الدالة
$R_f = [0,\infty)$
1 2 3 4 5
x
$D_f = [2,\infty)$

شكل (15)



y
$gr(f)$
$y = \sqrt{x-2}$
x

شكل (16)

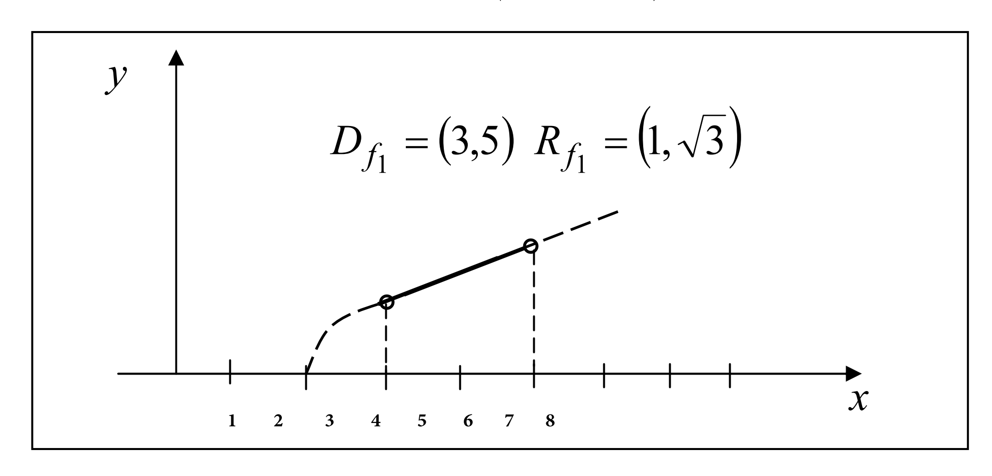
وحيث أن $f(x)$ تظل معرفة في أية نطاق جزئ S من D_f فإننا نستطيع بيان الدوال

$$f_1(x)=\sqrt{x-2} \quad ، \quad x\in S_1=\{x:3<x<5\}$$

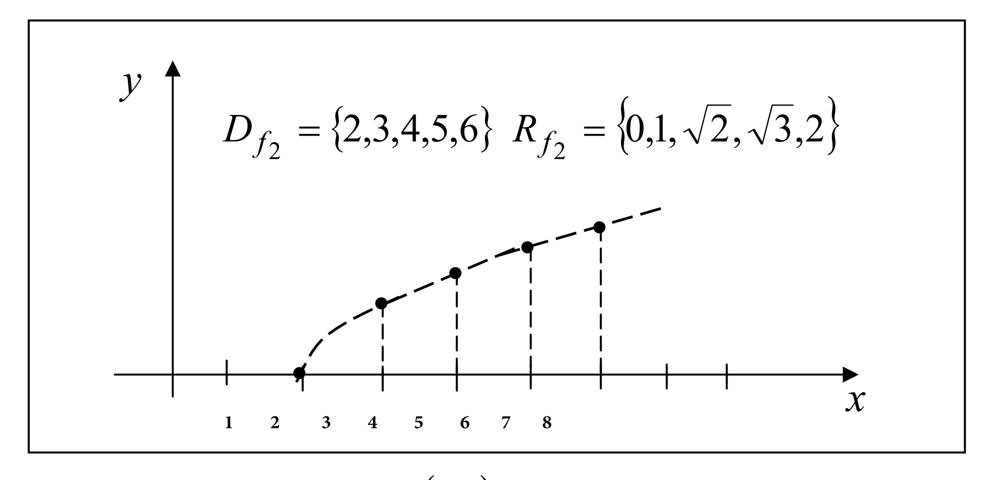
و $$f_2(x)=\sqrt{x-2} \quad ، \quad x\in S_2=\{2,3,4,5,6\}$$

و $$f_3(x)=\sqrt{x-2} \quad ، \quad x\in S_3=[5,\infty)$$

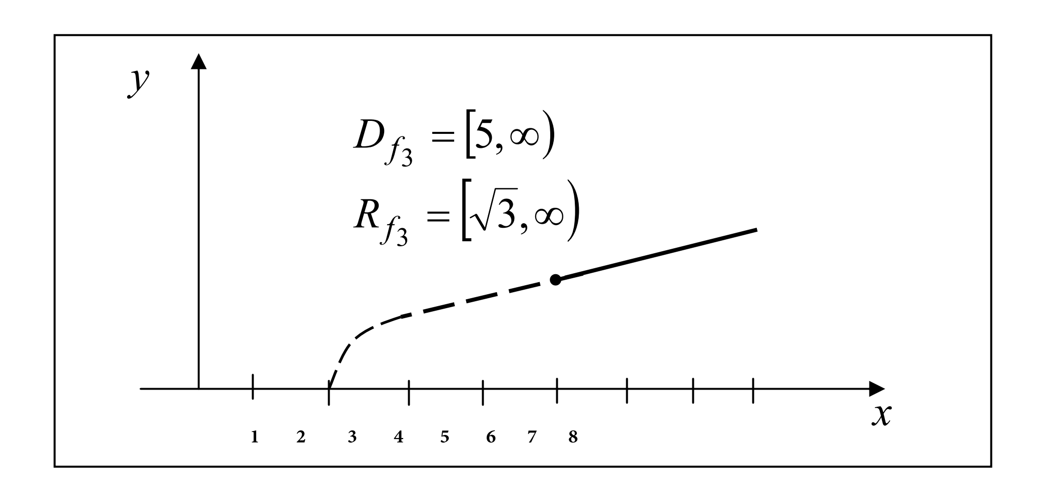
والأشكال 17، 18، 19 تبين $gr(f_1)$، $gr(f_2)$، $gr(f_3)$ وقد استعملنا الترميز $gr(f)$ بمعنى بيان الدالة f $(graph\ \ f)$



شكل (17) : $gr(f_1)$



شكل (18) : $gr(f_2)$



شكل (19) : $gr(f_3)$

ويمكن كتابة بيانات الدوال السابقة على الصورة،

$$gr(f) = \{(x, y) : y = \sqrt{x-2}, x \geq 2\}$$
$$gr(f_1) = \{(x, y) : y = \sqrt{x-2} \ , \ 3 < x < 5\}$$
$$gr(f_2) = \{(2,0), (3,1), (4, \sqrt{2}), (5, \sqrt{3}), (6,2)\}$$
$$gr(f_3) = \{(x, y) : y = \sqrt{x-2} \ , \ x \geq 5\}$$

وعموماً بما أنه يوجد قيمة واحدة فقط $f(a)$ لكل a في النطاق فإنه يوجد نقطة واحدة فقط لها إحداثي $x-$ يساوي a . $gr(f)$

من ثم كل خط رأسي يقطع المنحنى $gr(f)$ في نقطة واحدة فقط وتبعاً لذلك فإن $gr(f)$ لا يمكن أن يكون صورة مثل دائرة أو قطع مخروطي ناقص أو زايد حيث من الممكن أن يقطع الخط الرأسي مثل هذه المنحنيات في أكثر من نقطة .

ومن الجدير التأكيد عليه أن تقاطع البيان $gr(f)$ مع محور x $(x - \text{int}\,ercepts)$ هي جذور المعادلة $f(x) = 0$.

وهذه الجذور تسمى أصفار الدالة f . بينما تقاطع $gr(f)$ مع المحور y

هو $f(0)$ ، وحيد القيمة إن وجد. كذلك قد يكون للدالة أصفاراً أو قد لا يكون إذا كان $gr(f)$ لا يقطع المحور x .

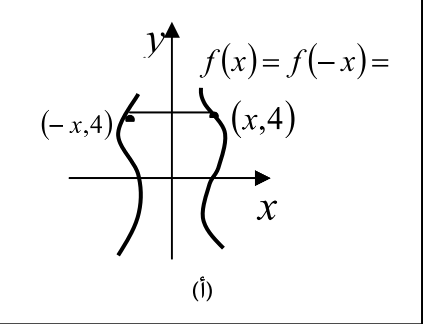
بعض الدوال تعطي بيانات فيها بعض من التماثل . مثل تماثل $gr(f)$ بالنسبة لخط معين أو نقطة معينة . من بين هذه الداول ما يلي :

1) الدوال الزوجية even functions

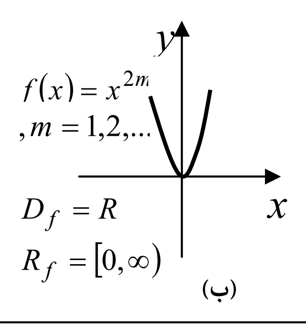
الدالة الزوجية f تحقق الشرط $f(-x)=f(x)$ لكل x في النطاق D_f وبذلك يكون $gr(f)$ متماثلاً بالنسبة لمحور y .

ومن الدوال الزوجية، 1، x^2 ، x^4 ،... x^{2m} ، $\frac{1}{x^2}$ ، $\frac{1}{x^4}$ ، ...، $\frac{1}{x^{2m}}$ ، $|x|$ ، $\cos x$ ، $\sec x$ ، $[g(x)]^{2m}$ حيث $m=0,1,2...$ ، $g(x)$ أي دالة حقيقية.

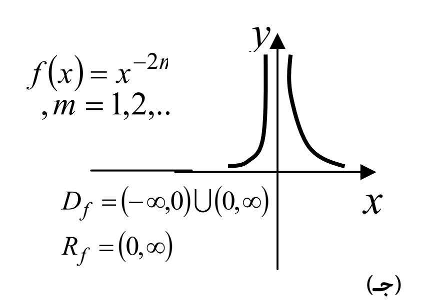
وشكل (19) يوضح بيان الدالة الزوجية عموماً وبعض دوال الزوجية معروفة.



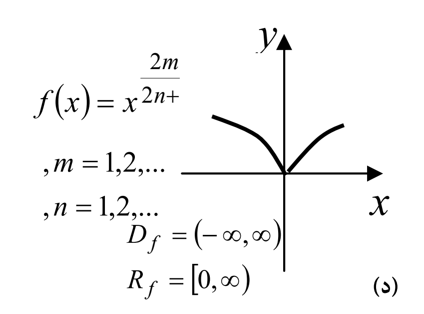
y
$f(x)=f(-x)=$
$(-x,4)$
$(x,4)$
x
(أ)



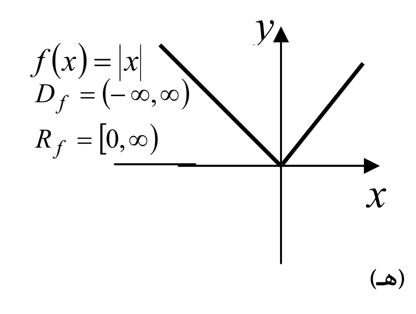
y
$f(x)=x^{2m}$
$,m=1,2,...$
$D_f=R$
$R_f=[0,\infty)$
x
(ب)



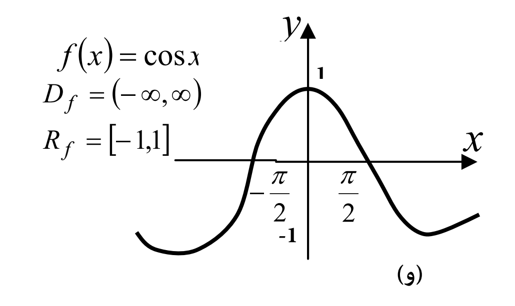
y
$f(x)=x^{-2n}$
$,m=1,2,..$
$D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
$R_f=(0,\infty)$
x
(جـ)



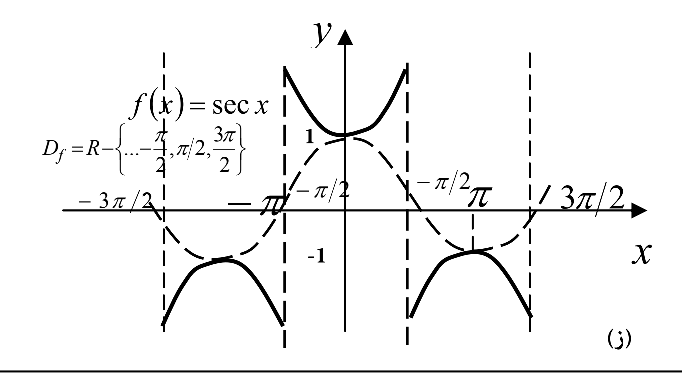
y
$f(x)=x^{\frac{2m}{2n+}}$
$,m=1,2,...$
$,n=1,2,...$
$D_f=(-\infty,\infty)$
$R_f=[0,\infty)$
x
(د)



y
$f(x)=|x|$
$D_f=(-\infty,\infty)$
$R_f=[0,\infty)$
x
(هـ)



y
$f(x)=\cos x$
$D_f=(-\infty,\infty)$
$R_f=[-1,1]$
1
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
-1
x
(و)



y
$f(x)=\sec x$
$D_f=R-\left\{...-\frac{\pi}{2},\pi/2,\frac{3\pi}{2}\right\}$
1
$-3\pi/2$
$-\pi$
$-\pi/2$
$-\pi/2$
π
$3\pi/2$
-1
x
(ز)

شكل (19)

2- الدوال الفردية odd functions

الدالة الفردية تحقق الشرط $f(-x)=-f(x)$ لكل x في نطاقها D_f وبذلك يكون $gr(f(x))$ متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل .

ومن الدوال الفردية x، x^3، x^5، ....، $\frac{1}{x}$، $\frac{1}{x^3}$، .... $\sin x$، $\cos ecx$، $\tan x$، $\cot x$ وشكل (20) يصور بيان الدالة الفردية بصفة عامة وبيانات بعض الدوال الفردية المعروفة .

ويجب تذكر أن معظم الدوال المستخدمة في الحسبان ليست زوجية ولا فردية، ولكن أيْ دالة يمكن تقسيمها إلى مجموع دالتين أحدهما زوجية والأخرى فردية. كذلك يجب تذكر الخواص التالية للدوال الزوجية والدوال الزوجية. فإذا كانت $Ev(x)$ دالة زوجية، $od(x)$ دالة فردية فإن،

1) $Ev_1(x)\ .\ Ev_2(x)$ هي دالة زوجية .

2) $od_1(x)\ .\ od_2(x)$ هي دالة زوجية .

3) $Ev(x)\ .\ od(x)$ هي دالة فردية .

4) $\frac{Ev_1(x)}{Ev_2(x)}$، $\frac{od_1(x)}{od_2(x)}$ دوال زوجية .

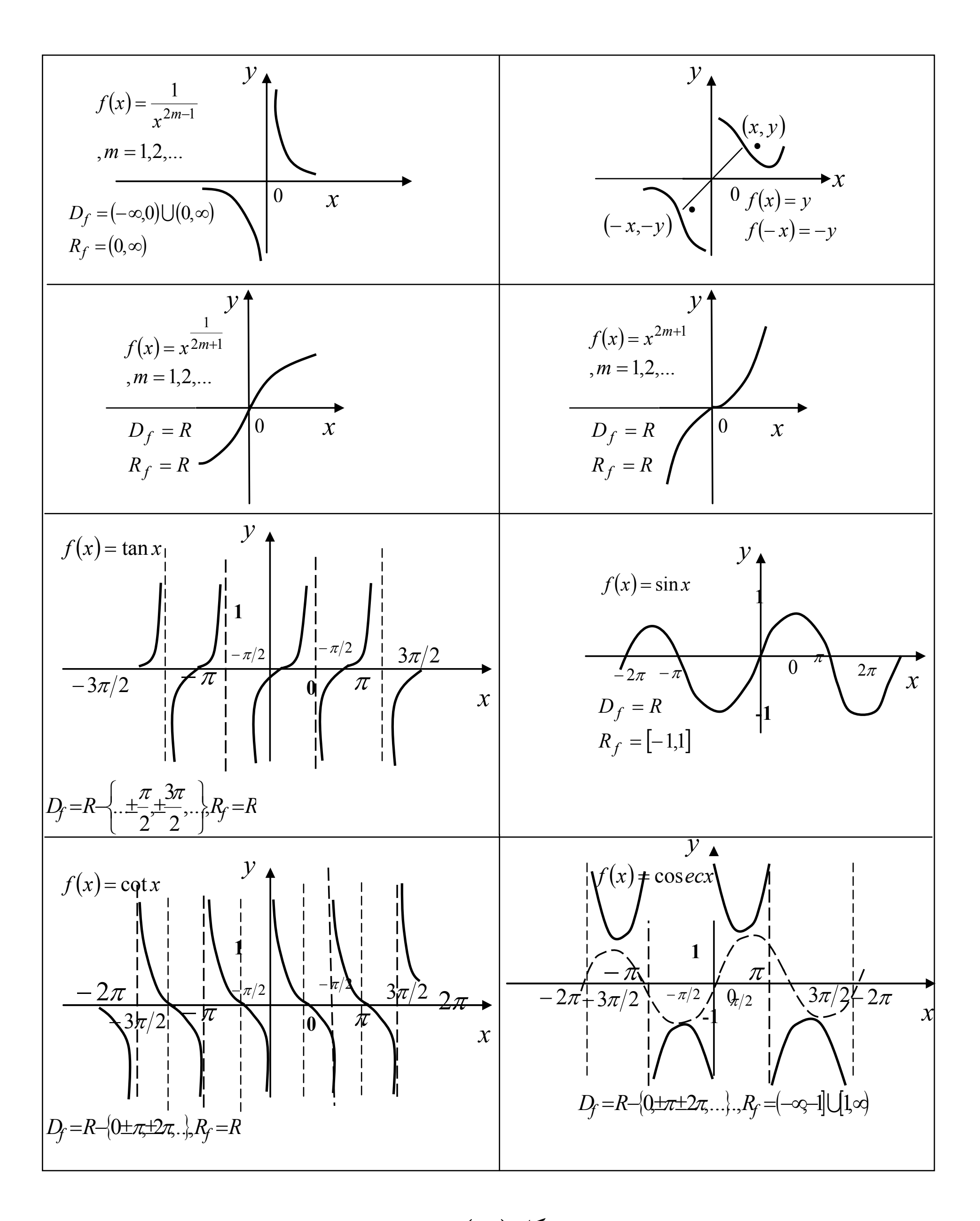
5) $\frac{Ev(x)}{od(x)}$ أو $\frac{od_1(x)}{Ev(x)}$ دوال فردية .

6) $[E_v(x)]^{Ev(x)}$، $[E_v(x)]^{od(x)}$، $[od(x)]^{Ev(x)}$ دوال زوجية.

7) $[od(x)]^{od(x)}$ دالة فردية.

وعلى ذلك فالدوال الآتية زوجية: $x^2\cos x$ ، $x^3\sin x$ ، $\frac{x^2}{x4+1}$ ، $\frac{\sin x}{x}$ ، $\frac{\sec x}{x^2}$ ، $(\cos x)^4$، $(x^2+x^4)^3$ ، $(x^3-x)^2$، لماذا ؟

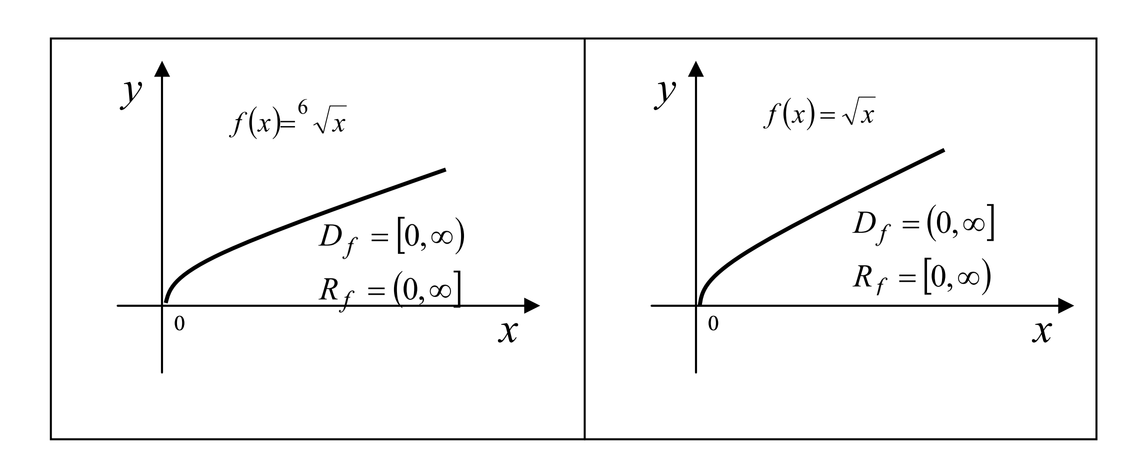
والدوال الآتية فردية: $x^2\tan x$، $\frac{x^2+1}{\sin x}$، $\frac{\cot x}{x^2}$، $(\sin x)^3$، لماذا ؟



$f(x)=\frac{1}{x^{2m-1}}$
$,m=1,2,...$
$D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
$R_f=(0,\infty)$
(x,y)
$(-x,-y)$
$f(x)=y$
$f(-x)=-y$
$f(x)=x^{\frac{1}{2m+1}}$
$,m=1,2,...$
$D_f=R$
$R_f=R$
$f(x)=x^{2m+1}$
$,m=1,2,...$
$D_f=R$
$R_f=R$
$f(x)=\tan x$
$D_f=R-\left\{...\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},...\right\},R_f=R$
$f(x)=\sin x$
$D_f=R$
$R_f=[-1,1]$
$f(x)=\cot x$
$D_f=R-\{0,\pm\pi,\pm2\pi,...\},R_f=R$
$f(x)=\operatorname{cosec} x$
$D_f=R-\{0,\pm\pi,\pm2\pi,...\},R_f=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

شكل (20)

أما الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ والدالة $f(x)=x^{\frac{1}{2m}}$ ، $m=1,2,...$ فهي ليست زوجية ولا فردية . ويوضح بيانها شكل (21)



شكل (21)

الدوال المتقطعة piecewise functions

تعرف الدوال المعطاة بأكثر من تعبير جبري بالدوال المتقطعة حيث يعطى شكل التعبير الجبري الممثل لها في كل فترة جزئية من نطاقها بشكل مختلف.

مثال (3)

وضح بيان الدالة المعرفة على النحو التالي

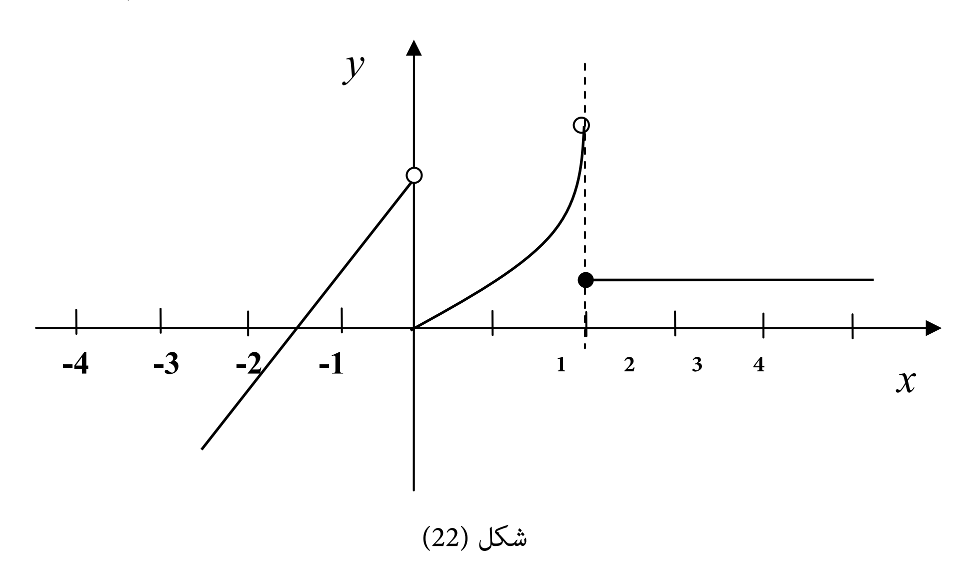
$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & , \quad x<0 \\ x^2 & , \quad 0\le x<2 \\ 1 & , \quad x\ge 2 \end{cases}$$

واكتب النطاق والمدى .

الحل (انظر شكل 22)

ويتضح من الرسم أن $D_f = (-\infty, \infty)$ ، $R_f = (-\infty, 4)$

فعندما $x < 0$ تكون $f(x) = 2x + 3$ وبيان f هو جزء من المستقيم



شكل (22)

$y = 2x + 3$ كما بشكل (22). الدائرة المفتوحة توضح أن النقطة $(0,3)$ ليست على البيان.

وعندما $0 \le x < 2$ تكون $f(x) = x^2$ وبيان f هو جزء من القطع المكافئ

$y = x^2$ والنقطة $(2,4)$ ليست من البيان .

وأخيراً عندما $x \ge 2$ تكون جميع القيم هي 1 دائماً، والبيان هو جزء من مستقيم أفقي يسمى نصف مستقيم بنقطة نهاية $(2,1)$ ويلاحظ في هذا المثال أن f هي دالة بيانها يتكون من عدة قطع غير متصلة .

دالة الصحيح الأعظم Greatest integer function

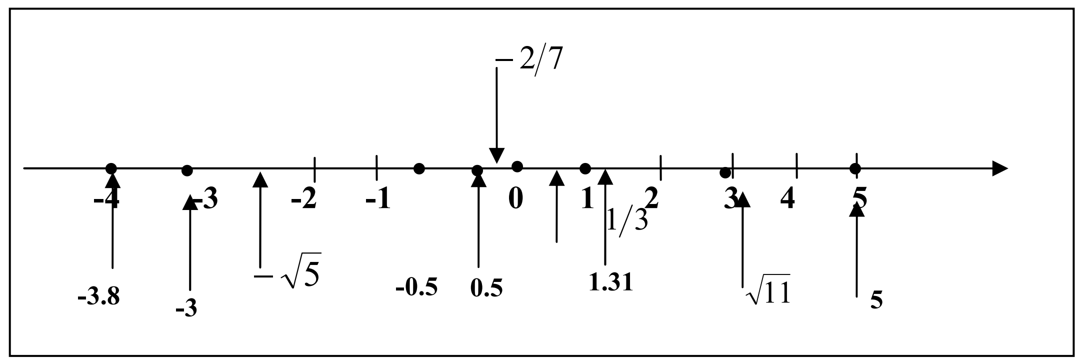
دالة الصحيح الأعظم تعرف على النحو، $f(x) = [x]$ حيث $[x]$ هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي . فإذا مثلنا R بنقط على محور x، فإن هي أول عدد صحيح إلى يسار x أو منطبق عليها . فمثلاً،

$$[05\ ] = 0 \ ، \ \left\lfloor\sqrt{11}\right\rfloor = 3 \ ، \ [1.31] = 1 \ ، \ [0.5] = 0$$

$$-[0.5] = -1 \ ، \ \left\lfloor -\sqrt{5}\right\rfloor = -3 \ ، \ [-3.8] = -4 \ ، \ [-3] = -3$$

وهكذا . ... ، $\left[-\frac{2}{7}\right] = -1$ ، $\left[\frac{1}{3}\right] = 0$ ، $[|\sin x|] = 1$

وشكل (23) توضح بيانياً مواضع x ، $[x]$ لكل القيم السابقة على خط الأعداد الحقيقية.



شكل (23)

أما شكل (24) فهو يوضح بيان الدالة $f(x) = [x]$.

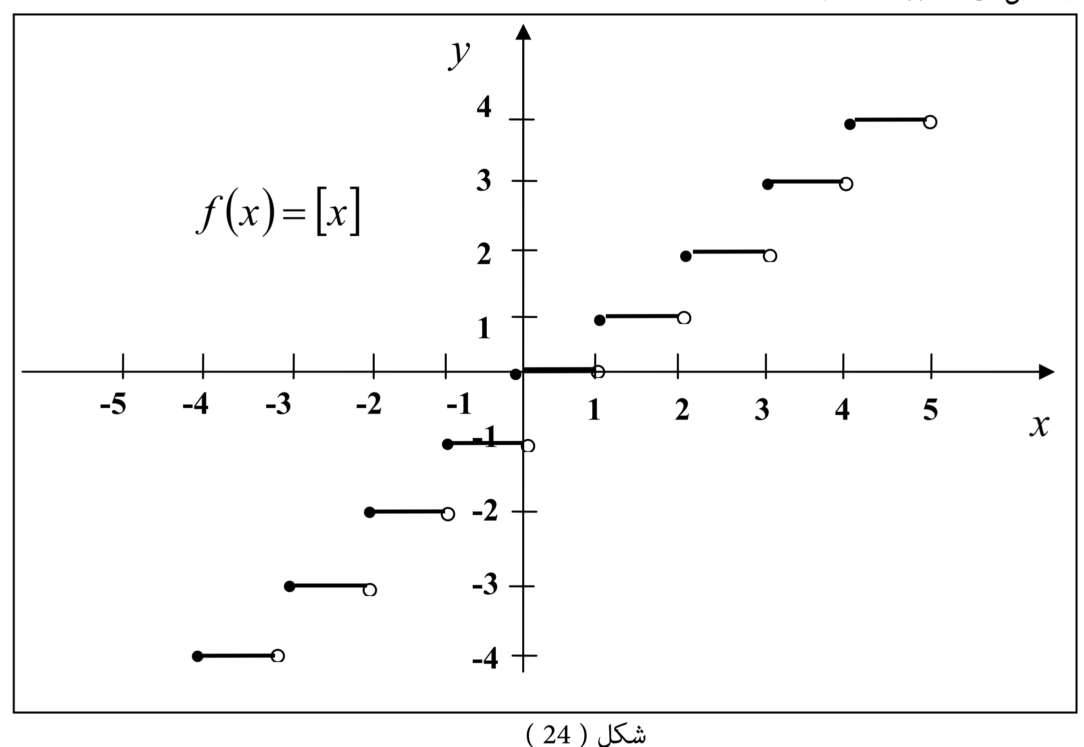
وقد استعنا بالجدول الآتي،

قيم x	$[x]$
$\vdots$	
$-2 \le x < -1$	-2
$-1 \le x < 0$	-1
$0 \le x < 1$	0
$1 \le x < 2$	1
$2 \le x < 3$	2
$3 \le x < 4$	3
$\vdots$	

فكلما كانت x بين عددين صحيحين متتاليين، فإن الجزء المناظر من بيان الدالة يكون قطعة من مستقيم أفقي ويمكن تلخيص تعريف $[x]$ على النحو

لأجل $n \le x < n+1$ تكون $[x]=n$ ، حيث n عدد صحيح موجب أو سالب.

والعكس إذا كانت $[x]=n$ فإن $n \le x < n+1$ فإذا كانت $[x]=2$ مثلاً، يتبع ذلك أن $2 \le x < 3$.



شكل (24)

مثال (4)

حل المعادلة $[x^2 - 2x] = -1$

الحل

$$[x^2 - 2x] = -1$$

إذن
$$-1 \le x^2 - 2x < 0$$

أضف 1 لكل طرف،

$$0 \le x^2 - 2x + 1 < 1$$

$$0 \le (x-1)^2 < 1$$

$$(x-1)^2 \ge 0 \quad \text{، و} \quad (x-1)^2 < 1$$

$$|x-1| \ge 0 \quad \text{، و} \quad |x-1| < 1$$

$$x \in R \quad \text{، و} \quad -1 < x-1 < 1$$

$$x \in (0,2) \ \text{الجواب هو} \ \therefore \quad 0 < x < 2$$

مثال (5):

حل المتباينة، $-1 \le [x] < 3$

الحل

$$-1 \le [x] < 3$$

ولأن $[x]$ أعداد صحيحة، $\therefore [x] = -1,2$

$$\therefore x \in [-1,0) \cup [2,3)$$

استعمال التحويلات الخطية في رسم المنحنيات

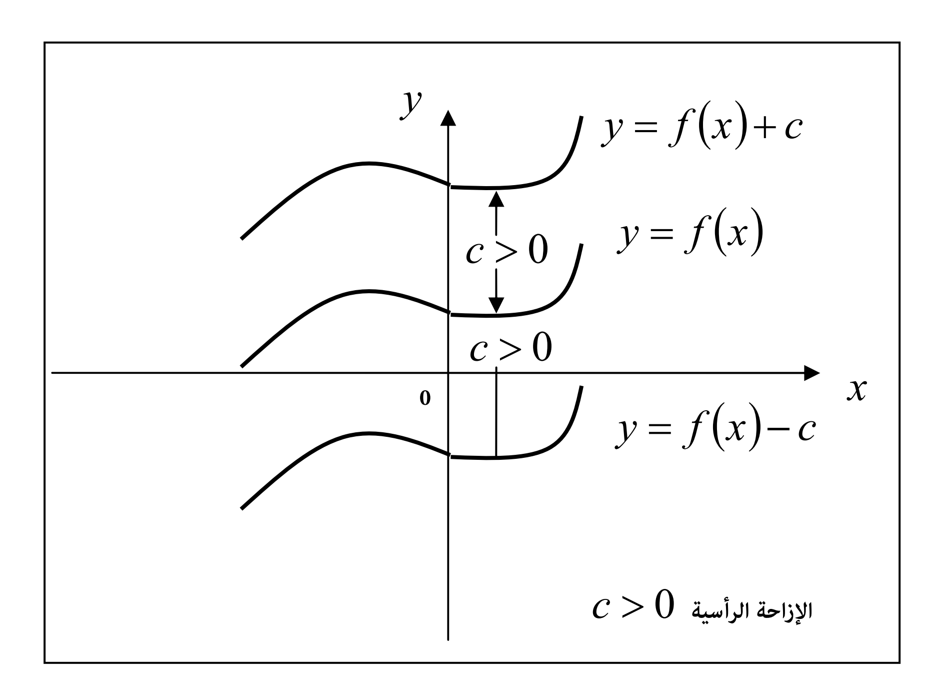
Use of linear transformations

إذا كنا نعلم بيان $y = f(x)$ يصبح من السهل توضيح بيانات الدوال الناشئة عن تحويلات خطية للدالة $f(x)$ مثل الإزاحة والتمدد والانضغاط أو الانكماش.

أولاً : الإزاحة Shift

أ- الإزاحة الرأسية : Vertical Shifts

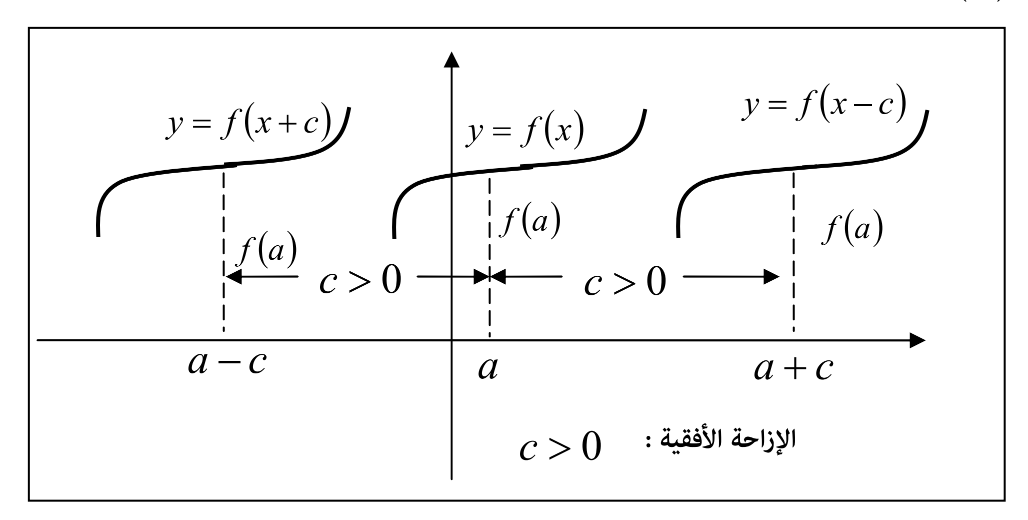
إضافة أو طرح مقدار ثابت موجب c لقيمة الدالة $f(x)$ يسبب إزاحة رأسية. فالإضافة c تزيح بيان الدالة f لأعلى مسافة c من الوحدات، وطرح c يزيح المنحنى لأسفل كما هو مبين في شكل (23)



شكل (23)

ب- الإزاحة الأفقية Horizontal Shifts

البيانان $gr(f(x+c))$ ، $gr(f(x-c))$ هما إزاحتين أفقيتان لمنحنى العلاقة $y = f(x)$ إلى اليسار مسافة c والى اليمين مسافة c على الترتيب، كما هو واضح في الشكل (24)



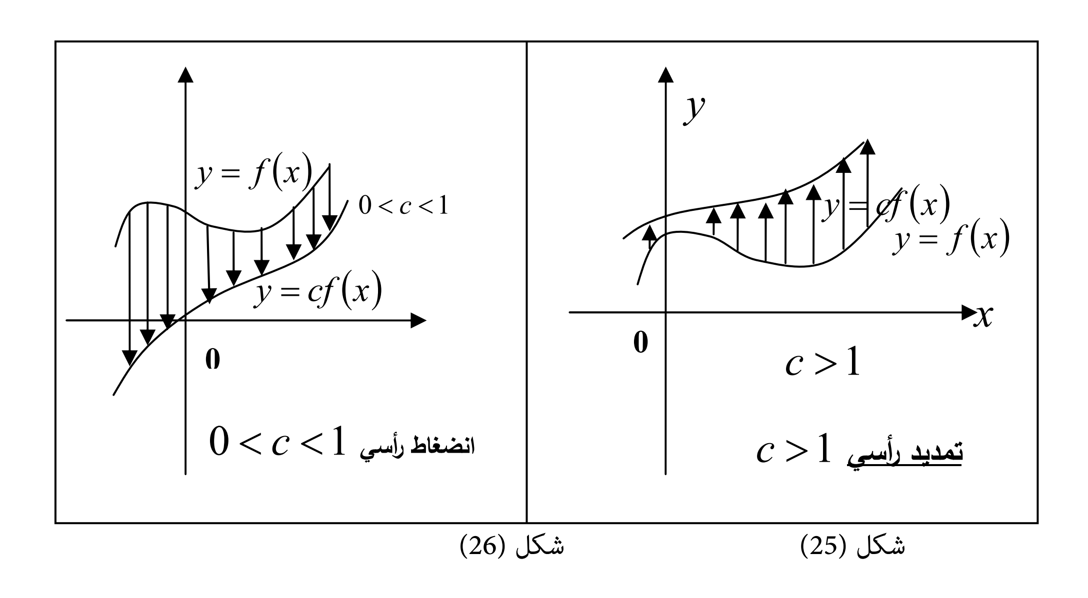
شكل (24)

ثانياً : التمديد والانضغاط Stretch and compression

أ- التمديد والانضغاط الرأسي

Vertical Stretch and vertical compression

إذا ضربنا كل قيمة للدالة $f(x)$ في مقدار ثابت c للحصول على $y = cf(x)$ نكون قد حصلنا على تمديد رأسي إذا كانت $c > 1$ وانضغاط رأسي لما $1 > c > 0$ كما في شكلي (25)، (26) .

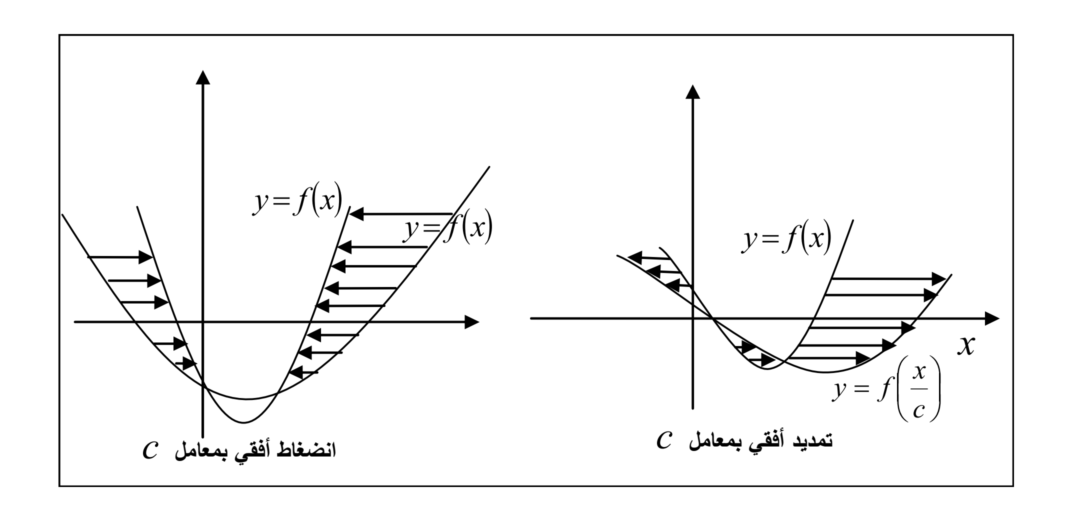


شكل (26) شكل (25)

ب- التمديد والانضغاط الأفقي Horizontal Stretch and Compression

البيانان $gr\left(f\left(\frac{x}{c}\right)\right)$ ، $gr(f(cx))$ هما تمديد وانضغاط أفقيان بنسبة c على الترتيب

كما هو واضح في شكلي (27) ، (28) المنحنى الذي معادلته $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ ، $c > 1$ والمنحنى الذي معادلته $y = f(cx)$ يمثل انضغاطة أفقي، $c > 1$.كما هو واضح في شكلي (27)، (28)، حيث اتخذنا المنحنى

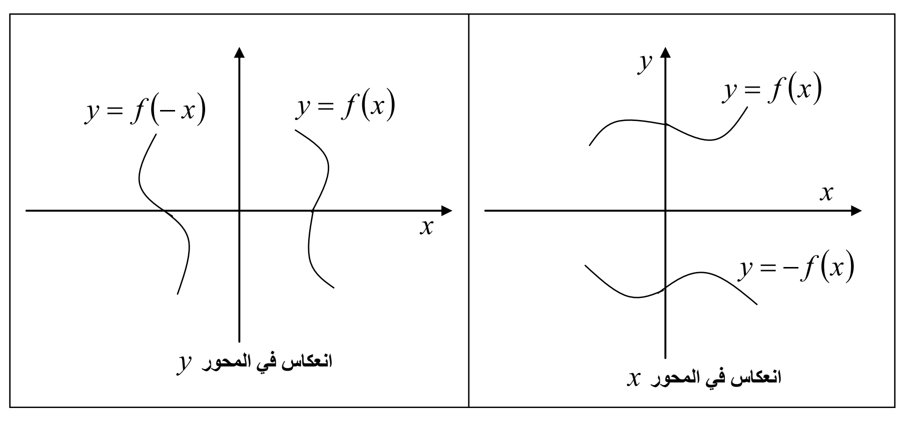


شكل (28) شكل (27)

$y=x^2-8x=f(x)$ ، وتمديده بمقدار c=2، $y=f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x^2}{4}-4x$ في شكل (27) أما في شكل (28) اتخذنا $y=f(x)=x^2-2x-3$ وانضغاطتها بمقدار c =2 وحصلنا على $y=f(x)=4x^2-4x-3$. وذلك على سبيل المثال.

ثالثاً :الانعكاس Reflection

بياناً المعادلتين $y=f(x)$ ، $y=-f(x)$ هما انعكاس أحدهما بالآخر عبر المحور x . شكل (29) وبياناً المعادلتين $y=f(x)$ ، $y=-f(x)$ هما انعكاس أحدهما للأخر عبر المحور y، شكل (30) .



شكل (30) شكل (29)

كثيرات الحدود Polynomial function

يقال لدالة f إنها كثير حدود إذا كانت على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث a_0 ، a_1 ، a_2 ، ... ، a_n أعداد حقيقية ، n ، $n-1$ ، ... أعداد موجبة صحيحة ،

وإذا كان $a_n \neq 0$ ، فإن f كثير حدود من الدرجة n وفيما يلي بعض أشكال كثيرات الحدود الخاصة ، $a \neq 0$ ،

مقدار ثابت ودرجتها صفر , $f(x) = 0$

دالة خطية ، درجتها 1 ، $f(x) = ax + b$

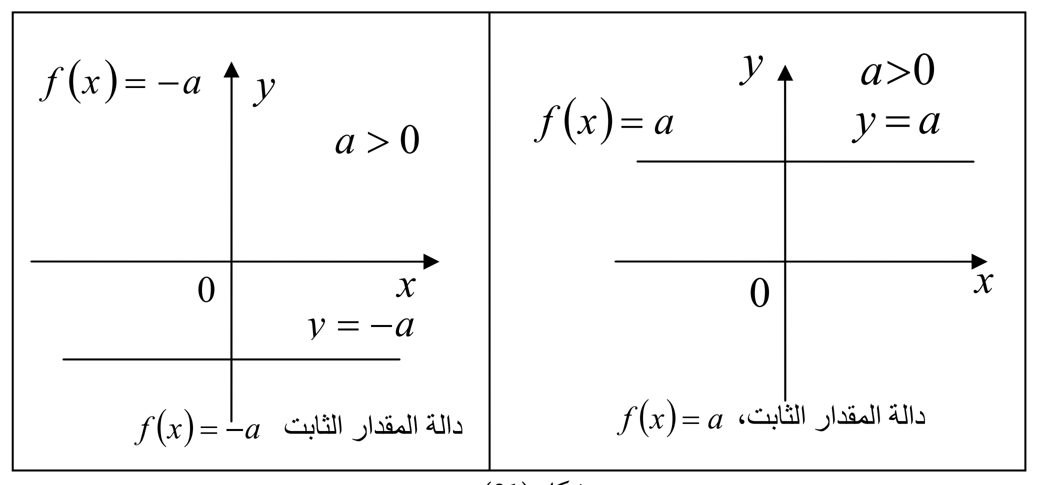
دالة تربيعية ، درجتها 2 ، $f(x) = ax^2 + bx + c$

دالة تكعينية ، درجتها 3 ، $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

دالة من الدرجة الرابعة ، $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

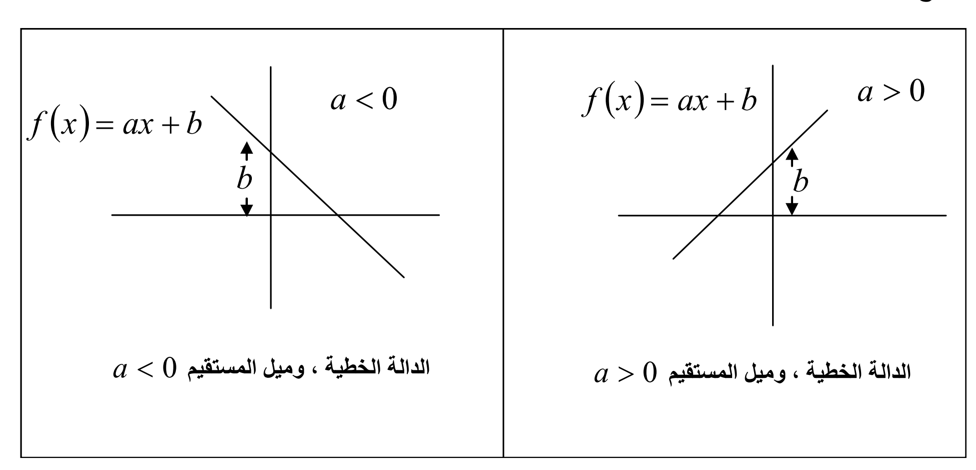
وهكذا .

وشكل الدالة التي درجتها صفر، أي دالة المقدار الثابت هو مستقيم يوازي المحور x، معادلته $y = a$ ، ويكون أعلى أو أسفل المحور x على حسب كون $a > 0$ أ، $a < 0$ على الترتيب أما $y = 0$ فهو المحور x نفسه. شكل (31)



شكل (31)

دالة الدرجة الأولى $f(x) = ax + b$ يكون بيانها هو المستقيم $y = ax + b$ ميله a ويقطع من محور y جزء طوله b . (شكل32)



شكل (32)

دالة الدرجة الثانية، التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$ يكون بيانها هو القطع المكافئ $y = ax^2 + bx + c$. ويمكن كتابتها على الصورة

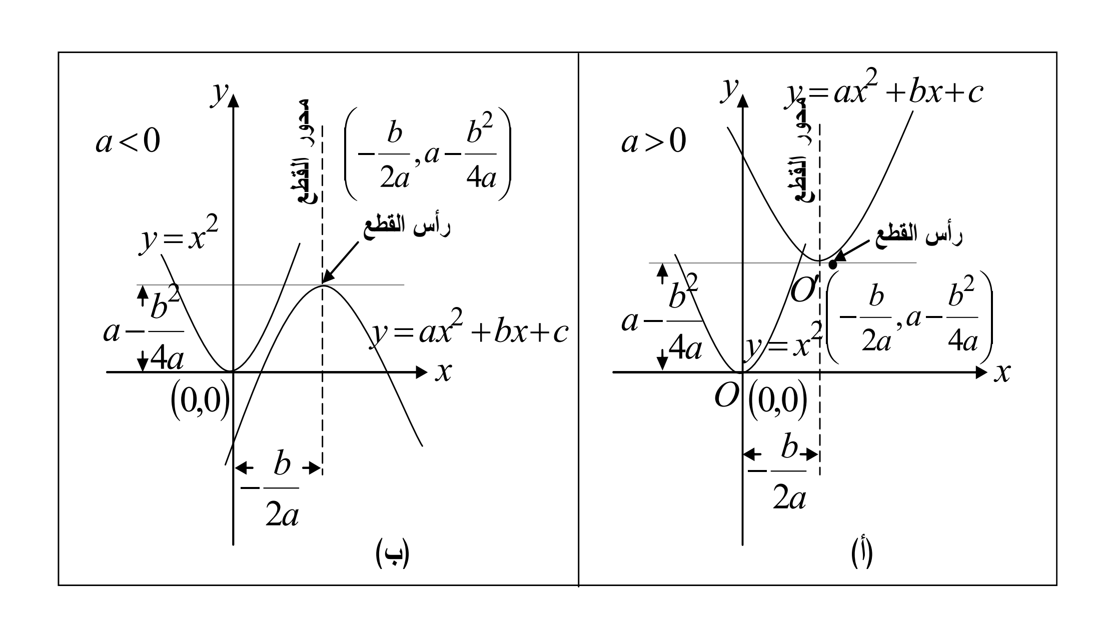
$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4a}$$

وهي نفس الدالة $y = x^2$ الموضحة في شكل (19-ب) ولكن أزاحت أفقياً مسافة $\frac{b}{2a}$ –، مع تمديد بمعامل a ثم إزاحة رأسية مقدارها $a - \frac{b^2}{4a}$.

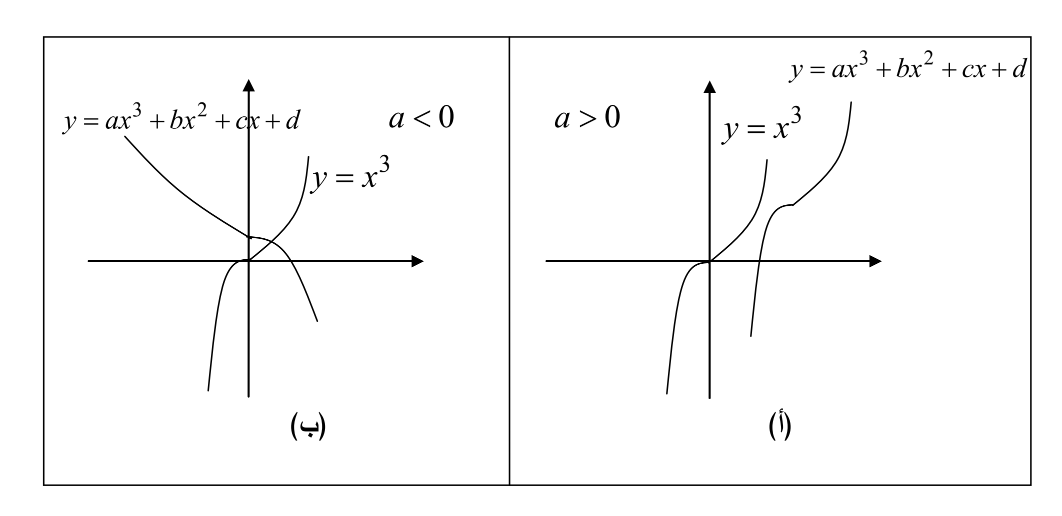
ونلاحظ أن رأس القطع $y = x^2$ هي نقطة الأصل ، أما رأس هذا القطع فهو النقطة $-\frac{b}{2a}, a - \frac{b^2}{4a}$

شكل (33-أ) يوضح الشكل العام للدالة التربيعية لما $a > 0$، شكل (33-ب) لما $a < 0$ حيث حدث انعكاس للدالة حول المحور $y = a - \frac{b^2}{4a}$.



شكل (33)

كذلك الشكل العام للدالة التكعيبية مشابه للدالة x^3 فيكون على الصورة الموضحة في شكل (34-أ) إذاك كانت $a > 0$ ، على الصورة الموضحة في شكل (34- ب) عندما $a < 0$.



شكل (34)

الدالة القياسية والدالة الجبرية

Rational function and Algebraic function

الدالة القياسية هي خارج قسمة دالتي كثير حدود. وسوف نتعرض فيما بعد لفحص بيانات كثيرات الحدود والدوال القياسية باستعمال طرق الحسبان. أما الدالة الجبرية فهي دالة يمكن التعبير عنها على شكل مجموع أو فرق أو جداء أو مقسوم أو أسس قياسية لكثيرات حدود . فمثلاً

$$f(x)=\frac{x^3-2x+3}{x^4+x^2+6x}$$ دالة قياسية ،

، $$f(x)=x^3-3\sqrt{x}+=\frac{x^2(3x-7)}{\sqrt{x^5+\sqrt{x}}}$$ هي دالة جبرية

جميع الدوال الأسية ، والمثلثية واللوغاريتمية ، وأية دالة ليست جبرية تسمى دوال ذكية transcendental ، وسوف نرجىء دراستها إلى ما بعد دراسة طرق الحسبان .

الدوال التركيبية Composite functions

عادة ما نستخدم في الحساب دوال تركيب من دوال بسيطة بعمل تجميعه معقدة من دوال البسط بطرق عديدة مستخدمين العمليات الحسابية والتركيب. فإذا كان f و g دالتين، نستطيع تعريف المجموع $f+g$ والفرق $f-g$ والجداء fg والمقسوم f/g على النحو التالي :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

نطاق $f+g$ أو $f-g$ أو fg هو تقاطع نطاقي f و g أي الأعداد المشتركة من كل من النطاقين فنكتب .

$$D_{f+g} = D_f \bigcap D_g$$
$$D_{f-g} = D_f \bigcap D_g$$
$$D_{fg} = D_f \bigcap D_g$$

أما نطاق f/g يتكون تقاطع نطاقي f و g ماعدا الأعداد التي تجعل $g(x)=0$ ، أيْ

$$D\, f/g = D_f \bigcap D_g \quad , g(x) \neq 0$$

أو نكتب ،

$$D\, f/g = D_f \bigcap D_g - \{x : g(x) = 0\}$$

مثال (5):

إذا كان ، $f(x) = \sqrt{2-x}$ ، $g(x) = 2x - 6$

أوجد مجموع، والفرق، وجداء، وخارج قسمة f و g مع وصف النطاق في كل حالة .

الحــل

$$D_f = \{x : 2 - x \geq 0\} = \{x : x \leq 2\}$$
$$D_f = (-\infty, 2]$$
$$D_g = \{x : x \in R\} = R$$
$$D_f \bigcap D_g = (-\infty, 2]$$
$$(f+g)(x) = \sqrt{2-x} + 2x - 6 \;\;,\;\; x \in (-\infty, 2]$$
$$(f-g)(x) = \sqrt{2-x} - 2x + 6 \;\;,\;\; x \in (-\infty, 2]$$
$$(fg)(x) = \sqrt{2-x}(2x-6) \;\;,\;\; x \in (-\infty, 2]$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{(2x-6)} \;\;,\;\; x \in (-\infty, 2] - \{3\}$$

ولكن $3 \notin (-\infty, 2]$

إذن ، أيضاً ،

$$x \in (-\infty, 2]$$

نستطيع أيضاً تركيب دالتين لتكوين دالة جديدة بعملية تركيبية أي بإيجاد دالة f لناتج الدالة g. أيْ دالة للدالة.

أو العكس. ونستعمل لذلك الترميز fog و gof وتقرأ (f دائرة g)
و (g دائرة f) على الترتيب. حيث الدالة fog تعرف على النحو،
الدالة التركيبية fog لكل من f و g تعرف بالآتي:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

ونطاق fog : هو جميع قيم x من نطاق g التي تجعل $g(x)$ في نطاق f

$$D_{fog} = \{x : g(x) \in D_f\}$$

مثال (6):

إذا كان $f(x) = x^2 - 3$ ، $g(x) = \left(\sqrt{1-x}\right)$

فأوجد a) fog ، b) gof ، مع ذكر نطاق كل منهما .

الحل

a)
$$(fog)(x) = f(g(x))$$
$$= f\left(\sqrt{1-x}\right)$$
$$= \left(\sqrt{1-x}\right)^2 + 3$$
$$= 1 - x - 3$$
$$= -2 - x$$

إذا أخذنا في الاعتبار النتيجة النهائية $-2-x$، قد نعتقد أن نطاق fog هو R لأن $-2-x$ معرفة لجميع قيم x الحقيقية، ولكن هذا خطأ. ولكن من تعريف D_{fog} هو قيم x في D_g التي تحقق شرط $g(x)$ تنتمي إلى D_f.

أيْ قيم x في $(-\infty,1]$ التي تجعل $g(x)$ فتنتمي إلى R. حيث أن $g(x)$ حقيقية لجميع قيم x في $(-\infty,1]$ ينتج أن،

$$D_{fog} = (-\infty,1]$$

b)

$$(gof)(x) = g(f(x))$$
$$= g(x^2 - 3)$$
$$= \sqrt{1 - (x^2 - 3)}$$
$$= \sqrt{4 - x^2}$$

والنطاق هو جميع قيم x في R التي تجعل $f(x)$ تنتمي إلى $(-\infty,1]$ وعندما نقول $f(x)$ تنتمي إلى $(-\infty,1]$ نعني $x^2 - 3$ تقع في $(-\infty,1]$ أيْ

$$x^2 - 3 \in (-\infty,1]$$
$$x^2 - 3 \le 1$$
$$x^2 \le 4$$
$$|x| \le 2$$
$$x \in [-2,2]$$

إذن ،

$$D^{gof} = [-2,2]$$

وهو يختلف عن كل من $D_f = R$ ، $D_g = (-\infty,1]$

مثال (7):

إذا كان $f = \sqrt{9 - x^2}$ ، $g = \sqrt{2 + x}$

أوجد نطاق الدالة fog

الحل

$D_f = \{x : 9 - x^2 \ge 0\}$ إذن $D_f = \{x : x^2 \ge 9\}$

أيْ $D_f = \{x : |x| \le 3\}$ إذن $D_f = [-3,3]$

$D_f = \{x : 2 + x \ge 0\}$ إذن $D_g = [-2, \infty)$

لإيجاد ، D_{fog} نبحث عن قيم x في D_g التي تجعل $g(x)$ في نطاق f . أيْ أن

$$\sqrt{2+x} \in [-3,3]$$

ولكن $\sqrt{2+x}$ موجباً دائماً .

$$\sqrt{2+x} \in [0,3]$$
$$2+x \in [0,9]$$
$$x \in [-2,7]$$

وجميع هذه الفترة تقع في D_g ، إذن

$$D_{fog} \in [-2,7]$$

يجب ملاحظة أن ،

$$(fog)(x) = f(g(x))$$
$$= f\left(\sqrt{2+x}\right)$$
$$= \sqrt{9-(2+x)}$$
$$= \sqrt{7-x}$$

إن نطاق الدالة $\sqrt{7-x}$ هو $(-\infty,7]$ أما نطاق $(fog)(x) = \sqrt{7-x}$ يختلف عن ذلك فهو $[-2,7]$.

مثال (8):

إذا كان

$$g(x) = \sqrt{x} \text{ ، } f(x) = x^2 - 6$$
$$w(x) = \sqrt{x^2 - 16} \text{ ، } h(x) = x - 16$$

أ) قارن بين نطاق الدالة fog ونطاق الدالة h .

ب) قارن بين نطاق الدالة gof ونطاق الدالة $w(x)$.

الحــل

1) $D_h = R$ ، $D_g = [0,\infty)$ ، $D_f = R$

نطاق fog هو قيم x في $[0,\infty)$ التي تجعل $\sqrt{x}$ في نطاق f أيْ في R . وحيث أن $\sqrt{x}$ دائماً في R

$$\therefore \quad D_{fog} = [0,\infty)$$

نجد أنه على الرغم من أن ،

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 16$$
$$(fog)(x) = x - 16$$

أيْ أن التعبير الجبري لكل من $(fog)(x)$ ، $h(x)$ هو $x-16$ إلا أن $D_h \neq D_{fog}$.

ب)
$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g(f(x))\\ &= g(x^2-16)\\ &= \sqrt{x^2-16}\\ &= w(x)\end{aligned}$$

ولكن نطاق $w(x)$ هو قيم x التي تجعل

$$x^2 - 16 \geq 0$$
$$|x| \geq 4$$
$$D_w = (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$$

ونطاق gof هو قيم x في نطاق f (في R) التي تجعل $f(x)$ في $[0,\infty)$ أيْ $x^2 - 16 \in [0,\infty)$

$$x^2 - 16 \geq 0$$
$$|x| \geq 4$$
$$D_{gof} = (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$$

أيْ أنه تصادف أن $D_{gof} = D_w$ على خلاف الفترة (أ) حيث كان $D_{fog} \neq D_h$

مثال (9):

إذا كان $f(x)=x^3+1$ ، $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ أوجد :

(أ) $(fog)(x)$ ، D_{fog}

(ب) $(gof)(x)$ ، D_{gof}

الحــل

(أ)

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\sqrt[3]{x-1}\right) \\ &= \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3+1 \\ &= x-1+1 \\ &= x\end{aligned}$$

بما أن x في R (نطاق g) فإن $g(x)$ في R (نطاق f) ونطاق fog هو

$$D_{fog}=R$$

(ب) بالمثل

$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(x^3-1\right) \\ &= \sqrt[3]{\left(x^3+1\right)-1} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x\end{aligned}$$

$D_{gof}=R$،

الدوال العكسية Inverse functions

الدالة المحايدة Identity function هي دالة $w(x)$ لها خاصية أن $w(x)=x$ لجميع قيم x في D_w ويقع بيانها على المستقيم $y=x$ ففي المثال السابق (مثال9) كان كل من fog ، gof دوال محايدة .

وعلى العموم إذا كان الدالة التركيبية لدالتين f ، g أيْ fog ، gof هي دالة محايدة فإن f ، g معكوساً لبعضهما . أيْ أن g معكوس f ، f معكوس g. أونكتب

$$g=f^{-1}(x)$$

$$f=g^{-1}(x)\text{،}$$

وكذلك

$$gog^{-1}(x)=x$$

$$fof^{-1}(x)=x$$

وتمتاز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x)$ بالخواص التالية :

1- إذا كانت النقطة (a,b) تقع على $gr(f(x))$ فإن النقطة (a,b) تقع على $gr\left(f^{-1}(x)\right)$.

2- يتبع (1) أن بيانى $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ متماثلان بالنسبة للمستقيم $y=x$ أيْ أن بياني الدالة ومعكوسها هما انعكاس أحدهما للأخر عبر المستقيم $y=x$. شكل (35) .

3- أيضاً بما أن وقوع النقطة (x,y) على بيان f يستلزم وقوع النقطة (y,x) على بيان $f^{-1}(x)$ فإن :

أ- $f^{-1}(x)$ تأتي من $f(x)$ باستبدال x ، y .

ب- أن نطاق f ، D_f هو مدى f^{-1} ، $R_{f^{-1}}$ وكذلك R_f هو $D_{f^{-1}}$.

مثال (10):

أوجد نطاق الدالة $f(x)=\sqrt{4-x}$ ومداها .

ثم أوجد $f^{-1}(x)$ مع ذكر نطاقها . ووضح بيانها مع بيان الدالة المحايدة في رسمة واحدة .

الحـــل

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$D_f=\{x:4-x\geq 0\}$$
$$=\{x:x\leq 4\}$$
$$D_f=(-\infty,4]$$

أما المدى ، فحيث أن الجذر موجب دائماً فإن ،

$$R_f=[0,\infty)$$

لإيجاد $f^{-1}(x)$ ، نكتب

$$f(x)=\sqrt{4-x}\Rightarrow y=\sqrt{4-x}$$

ولاجل $f^{-1}(x)$ ، استبدل x ، y وأوجد y صريحة

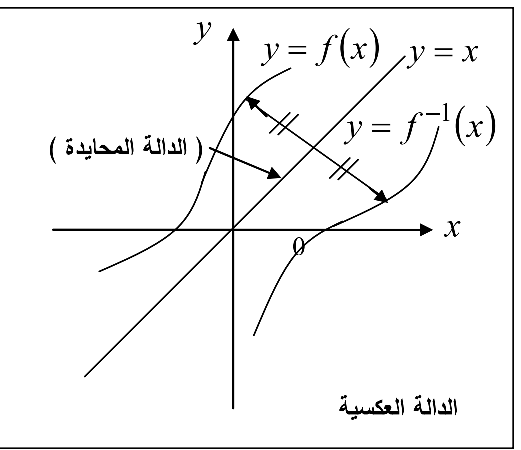
$$x=\sqrt{4-y}\Rightarrow x^2=4-y$$
$$\Rightarrow y=4-x^2$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=4-x^2$$

وبما أن

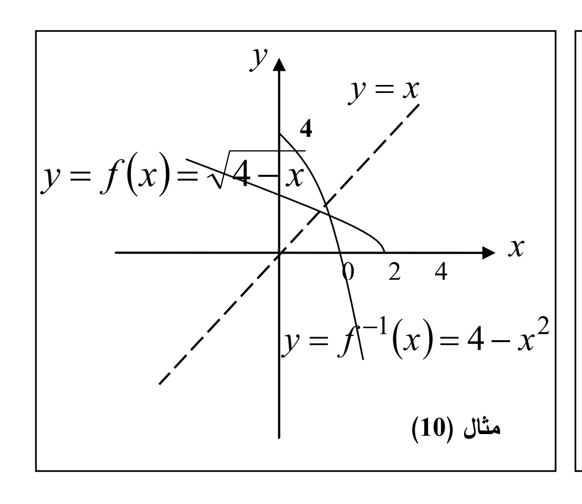
$$R_f=D_{f^{-1}}$$

$$\therefore\ \ f^{-1}(x)=4-x^2\ \ ,\ \ x\in[0,\infty)$$

وشكل (36) يوضح بيان f ، f^{-1} .



شكل (35)



شكل (36)

إذا تقاطع بياني الدالتين f ، f^{-1} فإن نقطة التقاطع لابد وأن تقع على بيان الدالة المحايدة $y = x$.

فإذا كان الأحداثي x لنقطة التقاطع هو $x = a$ ، فإن ،

$$f(a) = f^{-1}(a) = a$$

أيْ أن قيمة x عند نقطة التقاطع هي حل لأيْ من المعادلتين $f(x) = x$ أ، $f^{-1}(x) = x$

وتساوي قيمة y .

مثال (11):

إذا كانت $f(x) = 16 - x^2 \;,\; 0 \le x < 4$ أوجد :

$f^{-1}(x)$ موضحاً نطاقها. أوجد نقطة تقاطع $f(x)$ ، $f^{-1}(x)$ إن وجدت.

الحل

$$f(x) = 16 - x^2 \;,\; 0 \le x < 4$$

$$D_f = [0,4)$$
$$R_f = (0,16]$$

استبدل x بـ y ، $f(x)$ بـ x

$$x = 16 - y^2$$
$$y^2 = 16 - x \Rightarrow y = \pm\sqrt{16 - x}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{16 - x} \;\;,\;\; o < x \le 16$$

لايجاد نقطة التقاطع ، نضع

$$f(x) = x$$
$$16 - x^2 = x$$
$$x^2 + x - 16 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 64}}{2}$$

(القيمة السالبة خارج D_f)

$$x = \frac{\sqrt{65} - 1}{2}$$

نقطة التقاطع هي

$$\left(\frac{\sqrt{65} - 1}{2}, \frac{\sqrt{65} - 1}{2}\right)$$

وهي تقع في النطاقين D_f ، $D_f{}^{-1}$

Composite function of another function دالة الدالة

إذا كان f و g دالتين بحيث ،

$$y = f(u) \text{ و } u = g(x)$$

إذن بالتعويض عن u في $y = f(u)$ يؤدي إلى

$$y = f(g(x))$$

ولبعض مسائل الحسبان قد يحتاج الأمر لعكس هذا الإجراء، أي يعطي $y = h(x)$ بحيث تكون $h(x)$ هي الشكل التركيبي من $y = f(x)$ ، $u = g(x)$ بحيث $h(x) = f(g(x))$.

فمثلاً إذا كانت ، $y = (3x^2 + 2x - 1)^7$ فإنه .من الممكن تحويلها إلى دالة تركيبية كأن نفرض ، $u = 3x^2 + 2x - 1$ ونجعل $g(u) = y = u^7$

أي أن ، $y = (gou)(x)$

أ، $y = g(u(x))$

وبالمثل ،

$$y = (x^3 - 5x + 1)^{3/2} \equiv u = x^3 - 5x + 1 \quad , y = u^{3/2}$$
$$y = \sqrt{x^2 - 4} \equiv u = x^2 - 4 \quad , y = \sqrt{u}$$
$$y = \frac{3}{(x-2)^5} \equiv u = x - 2 \quad , y = \frac{3}{u^5}$$

و التمثيل كدالة تركيبة ليس وحيداً . فإذا رجعنا إلى $y = (x^3 - 5x + 1)^{3/2}$ فإنه من الممكن اتخاذ

$$u = (x^3 - 5x + 1)^{1/2} \quad , y = u^3$$

أ، $$u = (x^3 - 5x + 1)^{1/2} \quad , y = \sqrt{u}$$

وهكذا .

تمارين 1-2

1) $f(x)=\sqrt{x-4}-3x$ ، $g(x)=\dfrac{x}{x-3}$ أوجد :

$f(4)$ ، $f(8)$ ، $f(13)$ ، $f(x+4)$ ،
$f(5)$ ، $g(0)$ ، $g(3.01)$ ، $g(2.99)$.

2) إذا كان a ، b عددين حقيقيين أوجد في أبسط صورة $f(a)$ ، $f(-a)$ ، $-f(a)$ ،
$f(a+b)$ ، $f(a)+f(b)$ ، $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b}$ **علماً بأن** $b\neq 0$:

أ) $f(x)=\dfrac{5x}{a}-2$ ب) $f(x)=3-2x$

جـ) $f(x)=x^2-(a+b)x$ د) $f(x)=x^2-x+3$

هـ) $f(x)=2x^2+3x-7$ و) $f(x)=5x-2$

ثم أوجد قيم النواتج من (أ) إلى (و) عندما $a=2$ ، $b=3$.

3) أوجد نطاق الدالة f (D_f) ونطاقها R_f .

أ) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-4x}$ ب) $f(x)=\dfrac{2x+1}{6x^2+13x-5}$

جـ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{x^2-5x+4}$ د) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$

هـ) $f(x)=|x+3|$ و) $f(x)=|-x^2+1|$

ز) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ ح) $f(x)=\sqrt{4-x}$

ط) $f(x)=x+|x|$ ك) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{x+1}}$

ل) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2+x+1}$ م) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

4) عين ما إذا كانت الدالة f زوجية أو فردية أو ليست فردية أو زوجية .

أ) $f(x)=5x^3+2x$ ب) $f(x)=|x|-x$

جـ) $f(x)=|x|+2$ د) $f(x)=\left(8x^3-3x\right)^3$

هـ) $f(x)=\left(8x^3-3x\right)^4$ و) $f(x)=\sqrt{2x^4-x^2+3}$

ز) $f(x)=x^5-4x^3+2x$ ح) $f(x)=x(x+1)$

ط) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$ ك) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$

ل) $f(x)=3x^2+2\sec x$ م) $f(x)=\sqrt{x}+\tan x$

ن) $f(x)=\left[x-\dfrac{1}{2}\right]$ ي) $f(x)=x-[x]$

5) ارسم بيان الدالة f وأذكر النطاق D_f والمدى R_f

أ) $f(x)=\begin{cases} x+2 & , \ x\le -1 \\ x^3 & , \ |x|<1 \\ -x+3 & , \ x\ge 1 \end{cases}$ ب) $f(x)=\begin{cases} x-3 & , \ x\le -2 \\ -x^2 & , \ -2<x<1 \\ -x+4 & , \ x\ge 1 \end{cases}$

جـ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \ x\ne -1 \\ 2 & , \ x=-1 \end{cases}$ د) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & , \ x\ne 3 \\ -6 & , \ x=3 \end{cases}$

هـ) $f(x)=x-[x]$ و) $f(x)=x^2+2x$

ز) $f(x) = -x^2 - 2$ ح) $f(x) = |x+3|$

ط) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ك) $f(x) = |1 - x^2|$

ل) $f(x) = 2 - |x|$ م) $f(x) = x + |x|$

ن) $f(x) = \sqrt{4 - x}$ ق) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

ي) $f(x) = [x - 3]$ ر) $f(x) = [x] - 3$

س) $f(x) = 2[x]$ ش) $f(x) = [2x]$

ص) $f(x) = [x + 2]$ ض) $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right]$

ع) $f(x) = \frac{1}{2}[x]$ ف) $f(x) = [x] + 2$

6) ارسم على نفس مستوى الاحداثيات بياني الدالة f لقيم c المذكورة أمامها مستخدماً التماثل والإزاحة الأفقية والرأسية والتمديد والانضغاط . في كل مرة أذكر النطاق والمدى .

أ) $f(x) = |x| + c \quad ; \quad c = 0, 1, -3$

ب) $f(x) = |x - c| \quad ; \quad c = 0, 2, -3$

جـ) $f(x) = 3\sqrt{x} + c \quad ; \quad c = 0, 3, -2$

د) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + c \quad ; \quad c = 0, 1, -3$

هـ) $f(x) = 2\sqrt{x - c} \quad ; \quad c = 0, 1, -2$

و) $f(x) = -2(x - c)^2 \quad ; \quad c = 0, 1, -2$

ز) $f(x) = c\sqrt{4 - x^2} \quad ; \quad c = 0, 1, -3$

ح) $f(x) = (x + c)^3 \quad ; \quad c = 0, 1, -2$

ط) $f(x)=(x-c)^{2/3}+3 \quad ; \quad c=0,4,-3$

ي) $f(x)=(x-1)^{1/3}+c \quad ; \quad c=0,-2,1$

ك) $f(x)=x^2-2x+c \quad ; \quad c=0,1,-3$

ل) $f(x)=(x-1)^2+c \quad ; \quad c=-1,0,-4$

7) شكل (37) يوضح بيان دالة f نطاقها إرسم بيان المعادلة المعطاة . كرر نفس المسألة على بيان الدالة التي نطاقها الموضح في شكل (38) .

أولاً:

أ) $y=f(x+2)$

ب) $y=f(x-3)$

جـ) $y=f(x)+3$

د) $y=f(x)-2$

هـ) $y=-3f(x)$

و) $y=-\dfrac{1}{3}f(x)$

ز) $y=-f(x+2)-2$

ح) $y=3+f(x-2)$

ط) $y=2-f(x+3)$

ي) $y=|f(x)-2|$

بيان الدالة f

تمرين (7)

شكل (37)

ثانياً:

أ) $y=g(x-2)$

ب) $y=g(x+2)$

جـ) $y = g(x) + 2$

د) $y = g(x) - 2$

هـ) $y = -2g(x)$

و) $y = -\frac{1}{2}g(x)$

ز) $y = -g(x+4) - 2$

ح) $y = g(x-4) + 2$

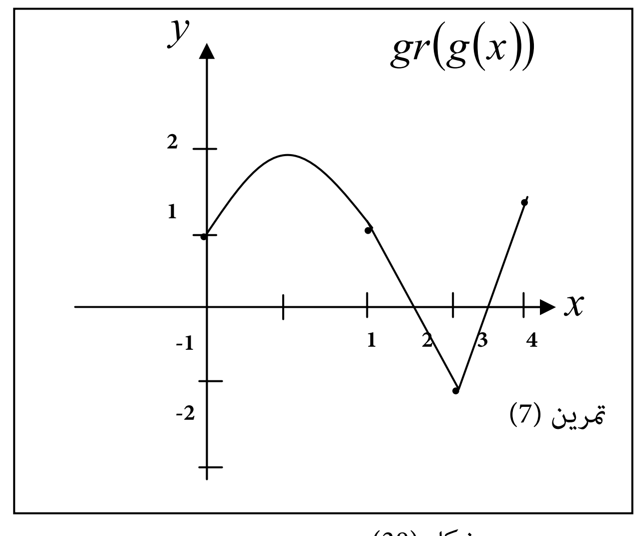
ط) $y = |g(x)|$

ي) $y = \sqrt{g(x)}$

ك) $y = |1 - g(x)|$

ل) $y = [g(x)]$

ن) $y = 1 + g(x)$



شكل (38)

8) أوجد فيما يلي الدوال الأتية التركيبية ونطاقها $(f+g)(x)$، $(f-g)(x)$،

$(fg)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، $(fog)(x)$ ، $(gof)(x)$

$$g(x) = \sqrt{x+5} \quad , \quad f(x) = \sqrt{x+5}$$

$$g(x) = \sqrt{x+4} \quad , \quad f(x) = \sqrt{3-2x}$$

$$g(x) = \frac{x}{x+5} \quad , \quad f(x) = \frac{x^2}{x-4}$$

$$g(x) = \frac{3x}{x+4} \quad , \quad f(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$g(x) = \sqrt{x+2} \quad , \quad f(x) = x^2 - 3x$$

$$g(x) = x^2 + 2x \quad , \quad f(x) = \sqrt{x-15}$$

$$f(x)=\sqrt{x-2} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x+5}$$
$$f(x)=\sqrt{3-x} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x+2}$$
$$f(x)=\sqrt{25-x^2} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x-3}$$
$$f(x)=\sqrt{3-x} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x^2+16}$$
$$f(x)=\frac{x}{3x+2} \quad , \quad g(x)=\frac{2}{x}$$
$$f(x)=\frac{x}{x-2} \quad , \quad g(x)=\frac{3}{x}$$
$$f(x)=\sqrt{2-|x|} \quad , \quad g(x)=x, 0<x<3$$
$$f(x)=\sqrt{4-[x]} \quad , \quad g(x)=|x|, 1\le x\le 5$$
$$f(x)=[|x|] \quad , \quad g(x)=|[x]|$$
$$f(x)=\sqrt{(x+1)/(x-1)} , \quad g(x)=1+\sqrt{x}$$
$$f(x)=\frac{-2\sqrt{x}}{x^2+1} \quad , \quad g(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$$

9) إذا كان $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ ، $g(x)=\dfrac{x^3-x+1}{11\sqrt{x-1}}$

أوجد القيم الموجودة فمايأتي :

$f(5)$ ، $g(5)$ ، $(fog)(5)$ ، $(gof)(5)$

$f(2)$ ، $g(2)$ ، $(fog)(3)$ ، $(gof)(3)$

$(fof)(4)$ ، $(gog)(2)$ ، $(go(fof))(5)$

10) أوجد الدالة العكسية للدالة f وأذكر نطاقها .

$f(x)=2+\sqrt{x-3}$ ، $f(x)=3+(x-2)^2, x\ge 2$

$$f(x)=\frac{x+1}{x}, x>0 \text{ ، } f(x)=3x-2, x\geq 1$$

$$f(x)=\frac{3x-2}{5x+1}, x\geq 0 \text{ ، } f(x)=\sqrt{x-3}+4$$

11) أوجد الشكل التركيبي للمعادلة ، (أيْ $y=f(u), u=g(x)$) ،

$$y=\sqrt[4]{x^3-8} \text{ ، } y=\left(x^2-3x\right)^{1/3}$$

$$y=3-\sqrt{x^4+1} \text{ ، } y=\frac{1}{(x-5)^6}$$

$$y=\sqrt{x-x^3} \text{ ، } y=\left(x^5+3x^3-x^2+1\right)^5$$

$$y=\frac{\sqrt{x+2}-7}{\sqrt{x+2}+2} \text{ ، } y=\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$$

(

12) إذا كانت $f(x)=\sqrt{x^3+1}-1$ أوجد قيمة تقريبية للمقدار $f(0.0001)$. ولكي تتفادى النتيجة الصفرية ضع المعادلة على الصورة $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^3+1}+1}$ ثم اثبت أن $f(0.0001)\cong 5.00x10^{-13}$.

الباب الثاني

النهايات واتصال الدوال

بند 2-1: مقدمة للنهايات

عادة ما نحتاج في الحسبان وتطبيقاته لإيجاد قيمة دالة $f(x)$ عندما تكون x قريبة من عدد معلوم a وليس بالضرورة يساوى a. فإذا كان المطلوب هو $f(0.998)$ أ، $f(1.001)$ فنحن إذن نريد حساب $f(x)$ بالقرب من $x=1$ وليس $f(1)$. فقد تكون $f(1)$ غير معرفة. مثال ذلك لو أن

$$f(x)=\frac{x+1}{|x-1|}$$

نجد أن $f(1)$ غير معرفة

أما $f(0.998)=\frac{1.998}{0.002}$ أي $f(0.998)=999$

، $f(1.001)=\frac{2.001}{0.001}$ أيْ $f(1.001)=2.001$

وكلما اقتربت x من أكثر زاد مقدار $f(x)$، فنجد

$$f(1.00001)=2.00001 \quad \text{و} \quad f(1.0001)=2.0001$$

وهكذا أما $f(1)$ نفسها تصل إلى مالانهاية أيْ غير معرفة .

واتخذنا مثال آخر مثل $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{3x-6}$ نجد أن، بالقرب من $x=2$،

$$f(1.9997)=1.332933363 \text{ ،} f(1.999999)=1.333332000$$

$$f(2.00002)=1.333336000 \text{ ،} f(2.00000)=1.333334667$$

بينما $f(2)=\frac{0}{0}$ أيْ غير معرفة.

وضح مما سبق أنه كلما اقتربت x من 2 اقتربت $f(x)$ من العدد $\frac{4}{3}=1.333333333$

ولكن لا يمكن التأكد من ذلك لأننا مجرد حسبنا قيم مختلفة اختيارية للدالة لقيم للمتغير x قريبة من 2 . ولكن نعطى نقاشاً مقدما لهذه النتيجة دعنا نحلل البسط والمقام لعوامل على النحو التالي

$$f(x)=\frac{x^2(x-2)}{3(x-2)}$$

وطالما أن $x-2\neq 0$، ولأن x قريبة من 2 ولا تساوي 2 نستطيع حذف العامل $(x-2)$، لتصبح،

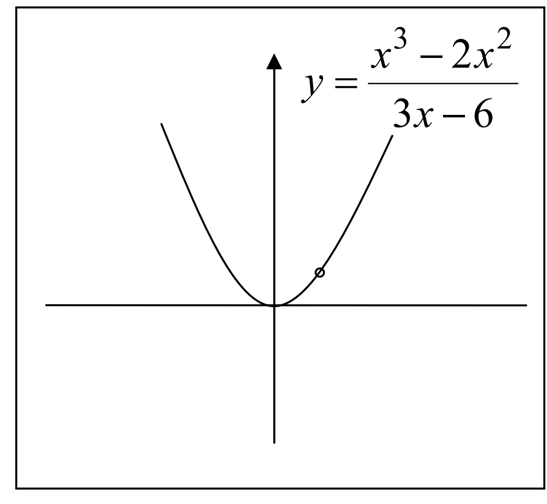
$$f(x)=\frac{x^2}{3}$$

وبيان f هو إذا القطع المكافئ $y=\frac{x^2}{3}$ محذوفاً من النقطة $(2,4/3)$ كما هو واضح في شكل (39) .

ويتضح من هندسة الشكل أنه كلما اقتربت x من 2، $f(x)$ تقترب من $\frac{4}{3}$ كما كان متوقع .

وعموماً إذا كانت f دالة معرفة على فترة مفتوحة، a ينتمي إلى هذه الفترة بحيث،

1) كلما اقتربت x من a (وتظل $x\neq a$) فإن $f(x)$ تقترب من عدد حقيقي L.



شكل (39)

2) وأنه من الممكن جعل قيمة الدالة $f(x)$ قريبة من L بتمدد كافي وذلك باختيار x قريبة بقدر كاف من a (لكن $x \neq a$).

فإننا عندئذ يمكننا استعمال الترميز

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

وتقرأ " The limit of $f(x)$, as x approaches a , is L "

أو " نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من a هي L "

وقد نكتب $f(x) \to L$ كلما $x \to a$

وذلك يعني على بيان $f(x)$ أن النقطة $(x, f(x))$ تقترب من النقطة (a, L) كلما اقتربت x من a .

ففي المثالين السابقين نكتب

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6} = \frac{4}{3} \quad ، \quad \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{|x-1|} = \text{قيمة غير معرفة}$$

يلاحظ إننا عرفنا النهاية باستعمال جمل "تقترب من"، و "تؤول إلى" بالبداهة؛ ولكننا سوف نضمن البند القادم تعريفاً رسمياً للنهاية بعيداً عن هذه المصطلحات.

أحياناً نعرف أن $f(x)$ تقترب من عدد معين كلما اقتربت x من a ولكننا لا نعرف هذا العدد، عندئذ نستعمل التعبير، $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة ويجب الانتباه إلى أن حساب، $\lim_{x \to a} f(x)$ ، يجب افتراض إن $x \neq a$ دائماً، أيْ أن قيمة الدالة $f(a)$ خارجة عن الموضوع فليس بالضرورة أن تكون $\lim_{x \to a} f(x)$ مساوية $f(a)$ وإن حدث أحياناً . فمثلاً إذا كانت،

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

فإن
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} \quad =\lim_{x\to 1} f(x)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

بينما
$$f(1)=3$$

في حالة التعبيرات الجبرية البسيط، نجد أن إيجاد، $\lim_{x\to a} f(x)$ هو أمر بسيط . فمثلاً عندما

$$f(x)=3x+1$$
$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}(3x+1)=3(4)+1=13$$

لأننا إذا اتخذنا قيمة x قريبة جداً من 4 مثل $x=4\pm\in$ ، $\in$ عدد موجب قريب جداً من صفر فإن
$$f(4\pm\in)=3(4\pm\in)+1$$
$$=13\pm\in$$

باتخاذ $\in$ أصغر فأصغر حتى تصبح تقريباً صفر فإن $f(4\pm 0)=13$ ، في هذه المسألة،
$$\lim_{x\to 4} f(x)=f(4)$$

وببساطة يكون،

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}=\sqrt{16+9}=5 \ ، \quad \lim_{x\to 4}(2x-3)=2(4)-3=5$$
$$\lim_{x\to 11}\sqrt{x+5}=4 \quad ، \quad \lim_{x\to -3}\left(x^2+1\right)=10$$

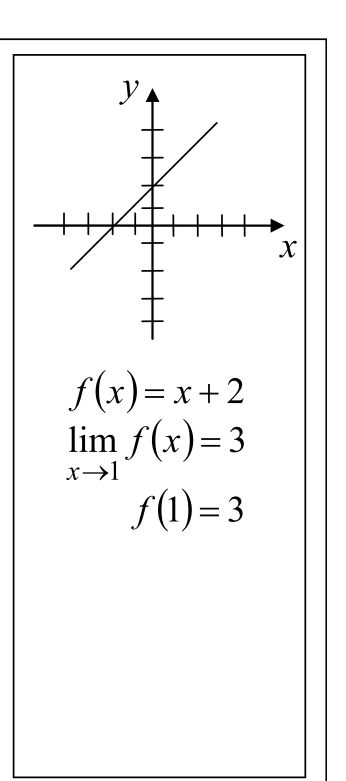
إن بعض الدوال الخاصة التي يتحقق فيها تساوي $f(a)$ ، $\lim_{x\to a} f(x)$ تسمى دوال مستمرة أو متصلة وسنعود إليها فيما بعد، عندئذ نحسب النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ بالتعويض عن $x=a$.

ولكن في دوال أخرى لا نستطيع استعمال التعويض المباشر السالف الذكر فمثلاً

$$\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)}=x+2 \;\;,\;\; x\neq 1$$

وبما أن $x \neq 1$، فإن $x-1\neq 0$ ومن المسموح به حذف العامل المشترك بين البسط والمقام $(x-1)$ وينتج عن ذلك أن بياني المعادلتين $y=\frac{x^2+x-2}{x-1}$ ، $y=x+2$ مماثلان لبعضهما .

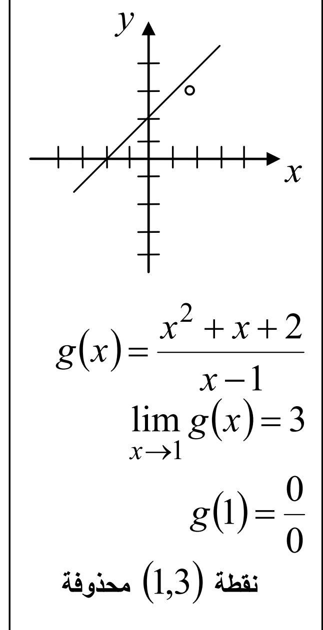
ماعدا عند $x=1$ لأن النقطة $(1,3)$ تقع على بيان المعادلة $y=x+2$ ولا تقع على بيان الدالة $y=\frac{x^2+x-2}{x-1}$ كما هو موضح في شكل (40) .



$f(x)=x+2$

$\lim_{x\to 1} f(x)=3$

$f(1)=3$

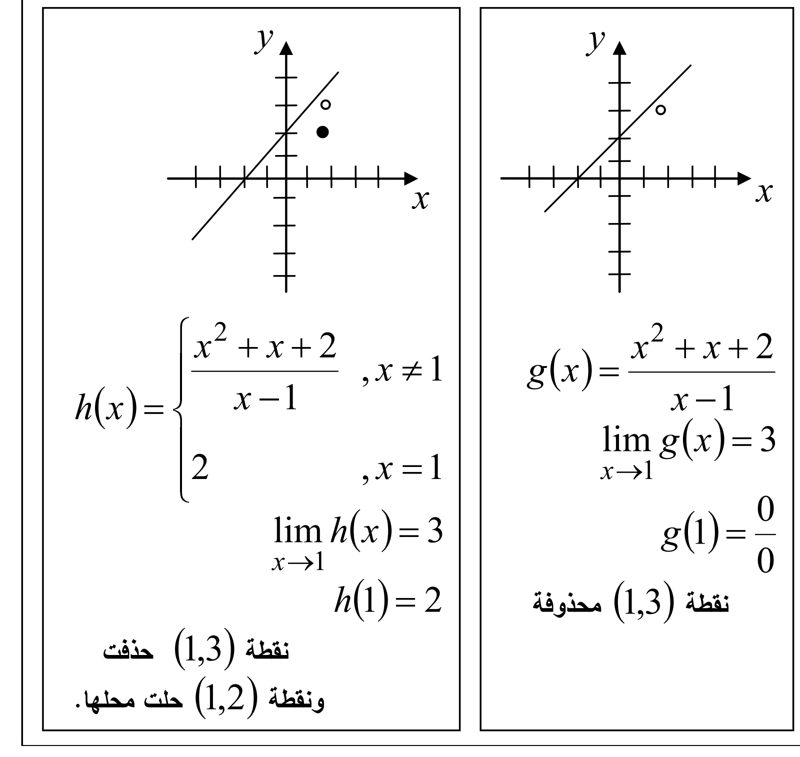


$g(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$

$\lim_{x\to 1} g(x)=3$

$g(1)=\frac{0}{0}$

نقطة $(1,3)$ محذوفة



$$h(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x+2}{x-1} & ,x\neq 1\\ 2 & ,x=1\end{cases}$$

$\lim_{x\to 1} h(x)=3$

$h(1)=2$

نقطة $(1,3)$ حذفت

ونقطة $(1,2)$ حلت محلها.

شكل (40)

مثال(1): أوجد النهايتين،

$$\lim_{x\to 9} = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \quad ، \quad \lim_{x\to 2} = \frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$$

الحــل

بما أن التعويض المباشر يعطي

$$\lim_{x\to 2} = \frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6} = \frac{0}{0}$$

$\therefore \quad x=2$ ليست في نطاق الدالة أيْ أن $x \neq 2$، $x-2 \neq 0$ إذن النهاية تصبح،

$$\lim_{x\to 2} = \frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(5x+3)} = \lim_{x\to 2} = \frac{2x-1}{5x+3} = \frac{3}{13}$$

كذلك، التعويض المباشر $x=9$ في المقدار $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

يعطي $\dfrac{0}{0}$، $x=9$ ليست في نطاق الدالة،

أيْ $x-9 \neq 0$، إذن،

(ضربنا في المرافق)

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)}$$

$$= \lim_{x\to 9}\sqrt{x}+3 = \sqrt{9}+3 = 6$$

مثال(2): أوجد النهايتين

$\left(i \quad \lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{x}\right.$ ، $\left(ii \quad \lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{x}\right.$ ،

باختيار قيم لـ x مناسبة وحساب $f(x)$

الحــل

نكون جدول للدالة $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

لقيم x القريبة من 0،

x	$y = \sin x / x$	
0.01	0.999983333	↓
-0.001	0.999999833	↓
-0.0001	0.999999998	↓
0	L	
+0.0001	0.999999998	↑
+0.001	0.999999833	↑
+0.01	0.999983333	↑

نلاحظ أن التعويض المباشر $x = 0$ يعطي $\frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ ولكن الجدول الموضح أعلاه

يعطي قيم تقريبية للدالة $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ بالقرب من $x = 0$، حيث x عدد حقيقي أو

هو التقدير الدائري للزاوية x ويتضح مباشرة من الجدول أنه يمكننا تخمين قيمة النهاية،

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$(ii$ نكون جدول للدالة $f(x)\frac{\log_{10} x}{x-1}$ بالقرب من $x = 1$

x	$f(x) = \log x/(x-1)$
0.997	0.434947229
0.998	0.434729356
0.999	0.434511774
1	L
1.001	0.434077479
1.002	0.433860766
1.003	0.433644340

نجد أنه لما $0.999 < x < 1.001$ تكون $0.43408 < f(x) < 0.43451$
ونستطيع التخمين بأن، $\lim_{x\to 1} f(x) = 0.4343$
$((0.43408 + 0.43451)/2)$

لاحظ أيضاً أن، $\left(\frac{1}{\log_{10} e}\right) = 0.4343$ وسنثبت فيما بعد في هذا الكتاب أن،

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log_{10} x}{x-1} = \frac{1}{\log_{10} e}$$

النهاية من جانب واحد One – sided limits

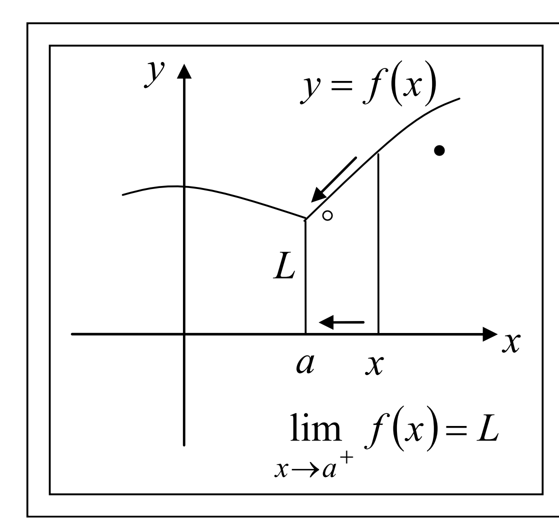
عند حساب $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ فإننا نجعل x تقترب من a بقدر كاف فإذا كانت x أكبر من a وبدأنا ننقص منها حتى تقترب من a ، نقول أننا نحسب النهاية من الجهة اليمنى حيث $x > a$ ، ونكتب

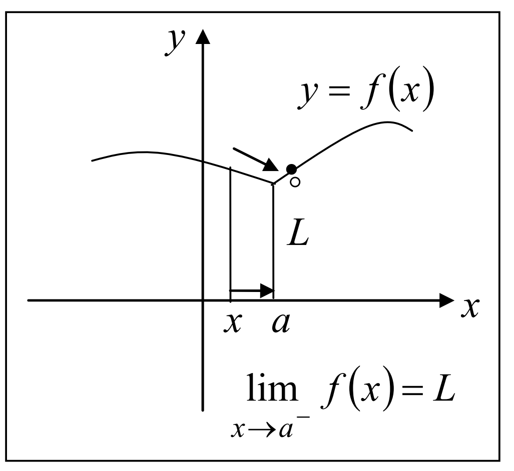
$$\lim_{x\to a^+} f(x)$$

وإذا حسبننا النهاية من الجهة اليسرى ، $x < a$ ، وجعلنا x تزايد حتى تصبح قريبة من a فنكتب النهاية على الصورة

$$\lim_{x\to a^-} f(x)$$

وشكل (41) يوضح اقتراب x من a بالطريقتين .





شكل (41)

ولحساب النهاية من اليمين يجب أن تكون f معرفة على الأقل في فترة مفتوحة (a,c) حيث c عدد حقيقي، ولحساب النهاية من اليسار يجب أن

تكون f معرفة في فترة (a,c) لعدد حقيقي c . الترميز $x \to \bar{a}$ يقرأ x تقترب من اليسار من a ، $x \to \overset{+}{a}$ يقرأ x تقترب من اليمين من a .

ويكون للنهاية $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ وجود فقط إذا كان ،

$$\lim_{x \to \bar{a}} f(x) = L = \lim_{x \to \overset{+}{a}} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

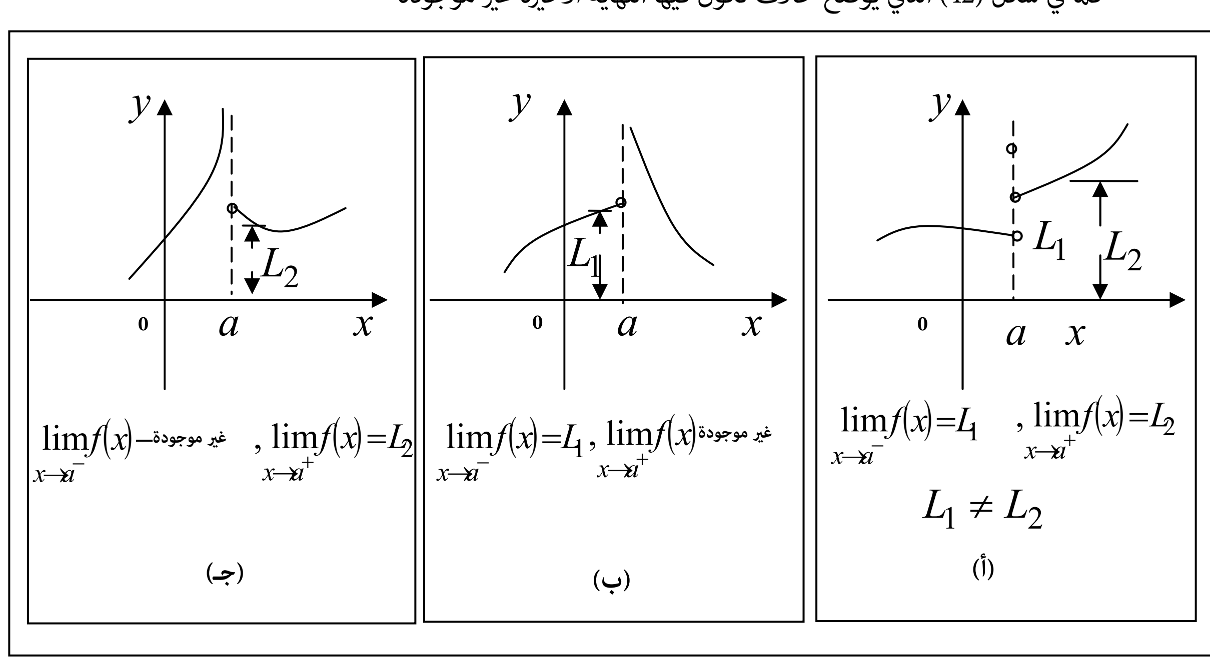
أما إذا كان ،

$$\lim_{x \to \bar{a}} f(x) = L_1 \ , \ \lim_{x \to \overset{+}{a}} f(x) = L_2$$

وكان $L_1 \neq L_2$ أ، أيْ من L_1 أو L_2 غير موجودة فإن النهاية $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

تكون غير موجودة

كما في شكل (42) الذي يوضح حالات تكون فيها النهاية الأخيرة غير موجودة



شكل (42)

مثال(3):

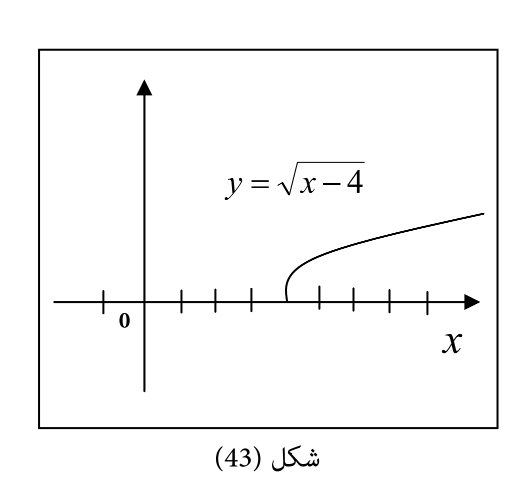
إذا كانت $f(x)=\sqrt{x-4}$ ، خطط بيان f وأوجد ما أمكن

أ) $\lim\limits_{x\to 4^{+}} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to 4^{-}} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ د) $f(4)$.

الحـل

تخطيط $gr(f)$ واضح في شكل (43)



شكل (43)

أ) إذا كان $x>4$ ، فإن $x-4>0$
ومن ثم $f(x)=\sqrt{x-4}$ هي عدد حقيقي، أيْ أن $f(x)$ معرفة ومن ثم

$$\lim_{x\to 4^{+}} \sqrt{x-4}=\sqrt{4-4=0}$$

ب) إذا كانت $x<4$ ، فإن $x-4<0$ ومن ثم $f(x)=\sqrt{x-4}$ ليست عدداً حقيقياً وبالتالي فإن ، (غير موجودة $\lim\limits_{x\to 4^{-}} f(x)$).

جـ) وبذلك $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ غير موجودة لأن $f(x)$ غير معرفة على فترة تحتوي 4، أي فترة تحتوي على أعداد حقيقية أقل من 4 وأخرى أكبر من 4.

د) $f(4)$ تحسب من التعبير الجبري مباشرة $f(4)=\sqrt{4-4}=0$

مثال(4):

إذا كانت $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ ، خطط $gr(f)$ وأوجد

ما أمكن ذلك ، أ) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ جـ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

الحــل

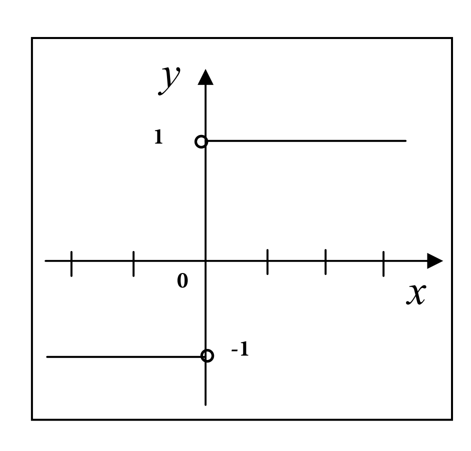
$gr(f)$ موضح في شكل (44) الدالة غير

معرفة عند $x=0$ حيث $f(0)=\dfrac{0}{0}$

أ) عندما $x<0$ ، فإن $|x|=-x$

$f(x)=\dfrac{x}{-x}=-1$ ،

إذن ، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$



شكل (44)

ب) عندما $x>0$ فإن $|x|=x$ ، $f(x)=\dfrac{x}{x}=1$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

جـ) بما أن النهاية من اليمين والنهاية من اليسار غير متساويتين ، ينتج أن

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ غير موجودة .

مثال (5):

خطط بيان الدالة f ،

$$f(x)=\begin{cases}2+x & ; \quad x<2\\ 10 & ; \quad x=2\\ 3x^2-4x & ; \quad x>2\end{cases}$$

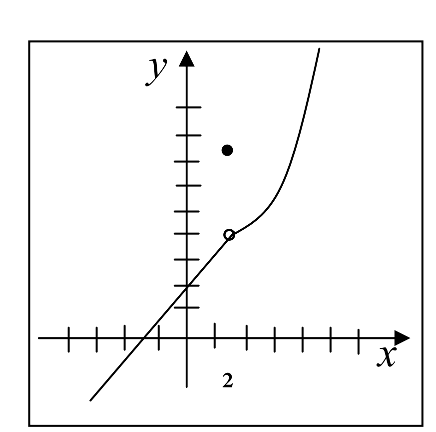
ثم أوجد ، $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to 2} f(x)$

الحـــل

البيان $gr(f)$ مخطط في شكل (45)

أ) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}(2+x)=4$

ب) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(3x^2-4x\right)=4$



شكل (45)

جـ) من (أ)، (ب) نجد أن النهايتين اليمنى واليسرى متساويتان

وينتج أن : $\lim_{x\to 4} f(x)=4$

لاحظ أن قيمة الدالة عند $x=2$ ، أيْ $f(2)=10$ ، ليس لها أي دخل في حساب النهاية.

تمارين 2-1

1) $\lim_{x\to 3}(2x+3)$ 2) $\lim_{x\to 2}(x^2+5)$ 3) $\lim_{x\to 4} x$

4) $\lim_{x\to 6} 11$ 5) $\lim_{x\to 7} 100$ 6) $\lim_{x\to(-1)}(\pi^2-1)$

7) $\lim_{x\to\pi/6}(-1)$ 8) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{2x+1}$ 9) $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-x^2}{15-x}$

10) $\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2+[x]}{2x-1}$.

في التمارين من (11) إلى (24) استعمل الاختصارات الجبرية للمساعدة على إيجاد النهاية إن كانت موجودة

11) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2+4x+1}$ 12) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

13) $\lim_{t\to 1}\frac{t^2-t}{2t^2+5t-7}$ 14) $\lim_{h\to 4}\frac{h^2-16}{\sqrt{h}-2}$

15) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ 16) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

17) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+18}{x+2}$ 18) $\lim_{z\to -2}\frac{z-4}{z^2-2z-8}$

19) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+3x+3}{x+1}$ 20) $\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-6x^2+x-3}{x-3}$

21) $\lim_{r\to -3}\frac{r^2+2r-3}{r^2+7r+12}$ 22) $\lim_{x\to 49}\frac{\sqrt{x}-7}{x-49}$

$\lim_{z \to 5} \frac{z-5}{z^2-10z+25}$ (24 $\qquad$ $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$ (23

في التمارين (25) – (35) أوجد النهايات الآتية إن وجدت :

أ) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ $\qquad$ ب) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ $\qquad$ ج) $\lim_{x \to a} f(x)$

(25 $a=-5$, $f(x)=\frac{|x+5|}{(x-3)}$

(26 $a=3$, $f(x)=\frac{|x-5|}{(x-3)}$

(27 $a=-8$, $f(x)=\sqrt{x+8}-x$

(28 $a=0$, $f(x)=\frac{2}{x^2}$

(29 $a=8$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x-8}$

(30 $a=\frac{7}{3}$, $f(x)=\sqrt{7-3x}-x^2$

(31 $a=1.5$, $f(x)=x+[x]$

(32 $a=2$, $f(x)=x+[x]$

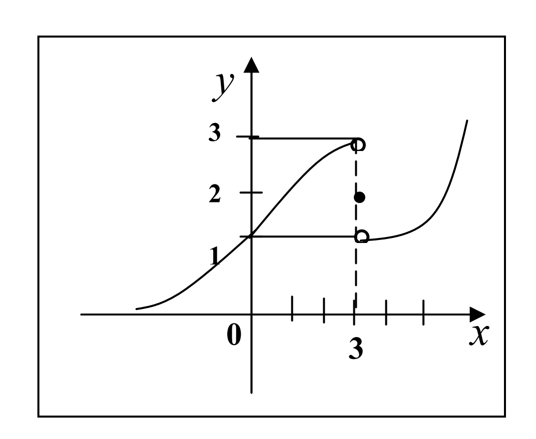
(33 $a=1$, $f(x)=\frac{|x|+1}{|x|-1}$

(34 $a=1$, $f(x)=\frac{x^2-1}{|x|-1}$

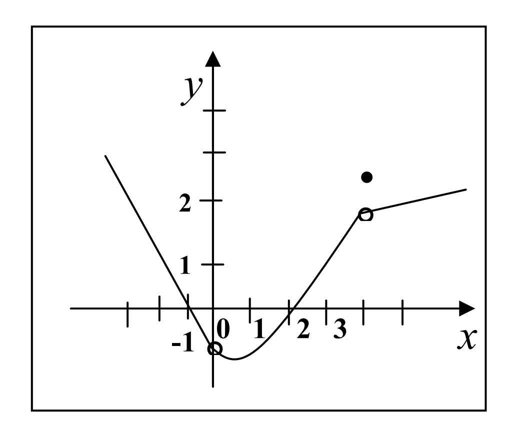
في التمارين من (36) إلى (45) استخدام بيان الدالة f وأوجد الموجود من النهايات الآتية ، نهاية $f(x)$ عندما:

$x \to \overset{-}{3}$ ، $x \to \overset{+}{3}$ ، $x \to 3$ ، $x \to \overset{-}{0}$ ، $x \to \overset{+}{0}$ ، $x \to 0$

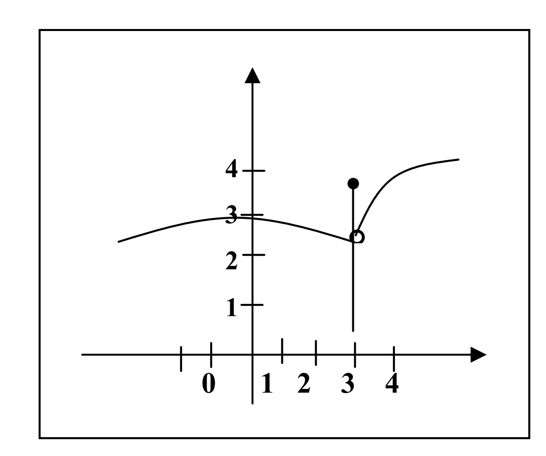
(36



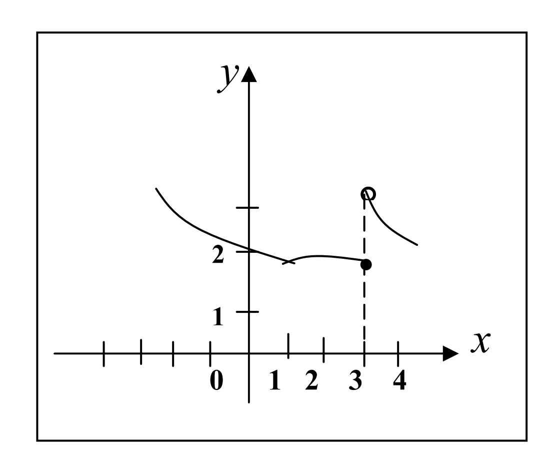
(37



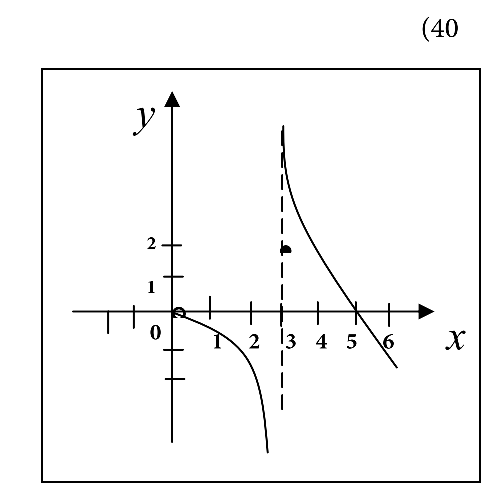
(38



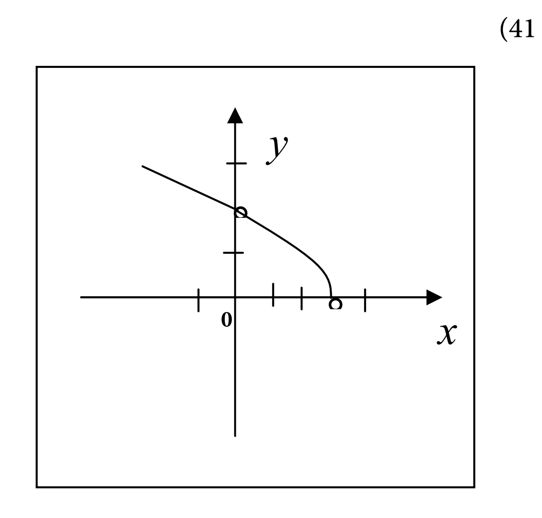
(39



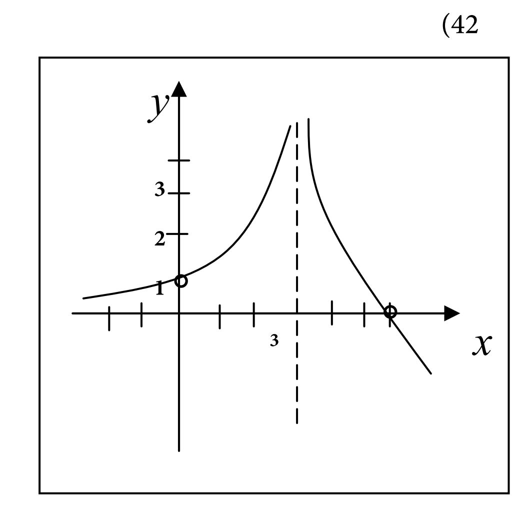
(40



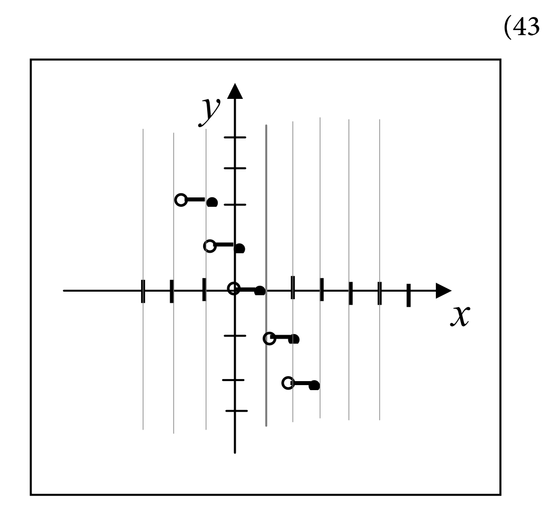
(41



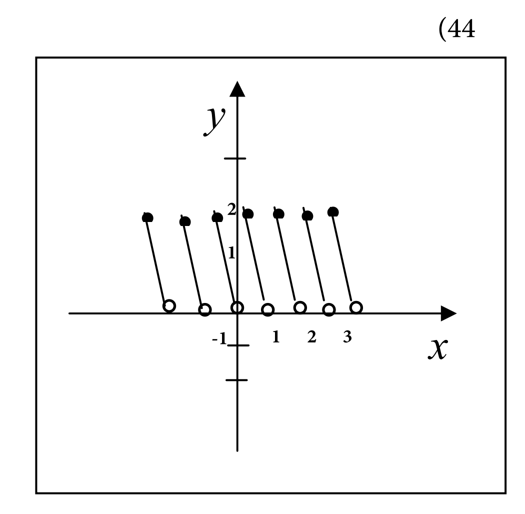
(42



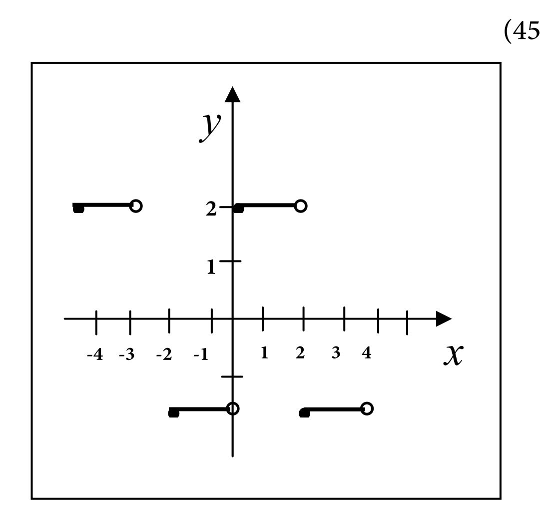
(43



(44



(45



في التمارين من (46) إلى (52) إرسم $gr(f)$ وأوجد النهايات الآتية إن وجدت .

أ) $\lim_{x\to a^{+}} f(x)$ ب) $\lim_{x\to a^{-}} f(x)$ جـ) $\lim_{x\to a} f(x)$

46) $a=1$, $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x<1 \\ 4-x, x\geq 1 \end{cases}$

47) $a=1,-1,2$, $f(x)=\begin{cases} x^3-1, x\leq 1 \\ 3-x, x>1 \end{cases}$

48) $a=1$, $f(x)=\begin{cases} 4x-2, x<1 \\ 4 \quad , x=1 \\ 4-2x, x>1 \end{cases}$

49) $a=1$, $f(x)=\begin{cases} 3x-1, x\leq 1 \\ 3-x \quad , x>1 \end{cases}$

50) $a=1$, $f(x)=\begin{cases} |x-1|, x\neq 1 \\ 1 \quad , x=1 \end{cases}$

51) $a=1$, $f(x)=\begin{cases} x^3+2, x<1 \\ 1 \quad , x=1 \\ x^3+x+1, x>1 \end{cases}$

52) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, x<1 \\ 6 \quad , x=2 \\ \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}, x>2 \end{cases}$ عندما $a=2,-1,3$

في التمارين من (53) إلى (60) استعين بجدول مناسب لإيجاد قيمة النهاية وأثبت ما يلي :

(53 $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \approx 2.72$$

(54 $$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{3/x} \approx 403.4$$

(55 $$\lim_{x\to 2}\frac{3^x-9}{x-2} \approx 9.89$$

(56 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4^{|x|}-9^{|x|}}{2}\right)^{1/|x|} = 6$$

(57 $$\lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{x-1} \approx 1.39$$

(58 $$\lim_{x\to 0}|x|^x = 1$$

(59 $$\lim_{x\to 1}\frac{\cos^{(\pi x/2)}}{x-1} \approx -1.571$$

(60 $$\lim_{x\to 2}\frac{\tan x-2x}{x\cos x} = -1$$

بند 2 – 2 تعريف النهاية Definition of limit

سوف نعطى الآن معنى دقيق للجملة ، y تقترب من L عندما x تقترب من a والذي رمزنا له ،

$$\lim_{x \to a} y = L$$

بأن نرفع y أن تبقى قريبة جداً من L بجعل قيم x قريبة من a .

فإذا كان $\in$ هي عدد موجب حقيقي صغير يكفى لأن تكون

$$L - \in < y < L + \in$$

أيْ

$$|y - L| < \in$$

فإننا نقول أن y لها سماحية $\in$ عند L. ومن ثم، القول أن y لها سماحية 0.01 عند L يعني $|y - L| < 0.01$؛ أيْ أن على بعد أقل من 0.01 عن L.

بالمثل لنعتبر عدد حقيقي موجب صغير δ يعطي سماحية δ عند a ، $x \neq a$. أيْ x لها δ سماحية عند a ، إذا كان

$$0 < |x - \delta| < \delta$$

أ،

$$a - \delta < x < a + \delta \ , \ x \neq a$$

فإذا كان لأي عدد $0 < \not\in$ يوجد عدد $0 < \delta$ بحيث إذا كان لـ x سماحية فإن y يكون لها سماحية $\in$ عند L فإن ،

$$\lim_{x \to a} y = L$$

ولتقريب المفهوم ، إذا كان لجميع قيم x في الفترة (0.999,1001) تكون y في الفترة (2.9998,3.0002) أيْ x لها سماحية 0.001 عند 1 ، و y لها سماحية 0.0002 عند 3 فإننا مقول أن

$$\lim_{x \to 1} y = 3$$

كما كنا نخمن قيمة النهاية باستعمال الجدول في البند (2-1)

وثم فإن $\lim_{x\to a} y = L$ يعنى أنه لكل $\in > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان
$0 < |x - a| < \delta$ فإن $|y - L| < \in$

تعريف النهاية

" إذا كانت y معرفة على فترة مفتوحة تحتوي على a ، ماعدا أحياناً عند a نفسها ، وكان L عدد حقيقي . فإن الجملة ،

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

تعنى أنه لكل $\in > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x - a| < \delta$ فإن
$|f(x) - L| < \in$"

وتسمى المتباينة $0 < |x - a| < \delta$، السماحية δ والمتباينة $|f(x) - L| < \in$، السماحية $\in$.

ويمكن كتابة المتباينتين بدون استعمال القيم المطلقة على النحو :

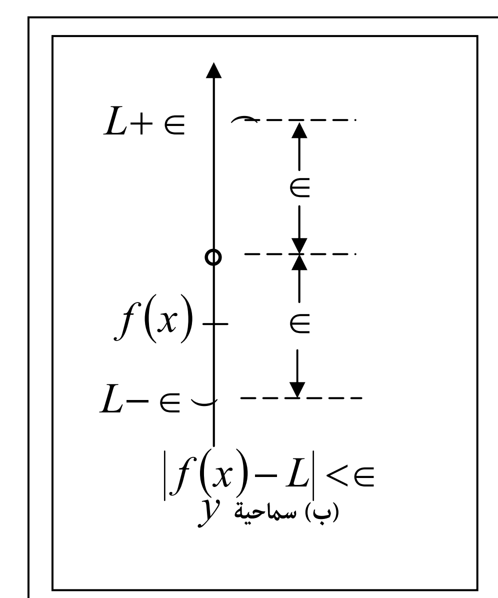
$a - \delta < x < a + \delta \ , \ x \neq a$ للسماحية δ

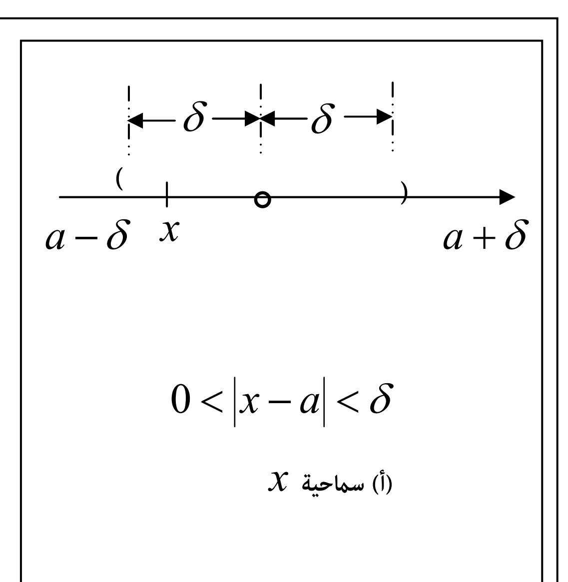
$L - \in < f(x) < L + \in$ للسماحية $\in$

وشكل (46) يمثل المتباينتان على خطى أعداد . كما يمكننا صياغة تعريف النهاية السابق بطريقة أخرى كما يلي :

"$\lim_{x\to a} f(x) = L$ تعنى أنه لكل $\in > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا x تقع في الفترة $(a - \delta, a + \delta)$، $x \neq a$ فإن $f(x)$ تقع في الفترة $(L - \in, L + \in)$"

وإذا كان للدالة $f(x)$ نهاية عندما تقترب x من a ، فإن هذه النهاية وحيدة.





شكل (46)

مثال(6): أثبت باستعمال التعريف الرسمي للنهاية أن

$$\lim_{x\to 4}=(3x-5)=7$$

الحــل

نفرض أن $f(x)=3x-5$ ، $a=4$ ، $L=7$ ونحاول أثبات أنه لأي عدد $0<\in$ ،يمكن ايجاد $\delta>0$ بحيث إذا كان $0<|x-4|<\delta$ فأن $|(3x-5)-7|<\in$ ، على النحو التالي :

$$|(3x-5)-7|<\in$$

$$|3x-12|<\in$$

$$|3(x-4)|<\in$$

$$3|x-4|<\in$$

$$|x-4|<\frac{\in}{3}$$

إذن باختيار $\delta \le \frac{\in}{3}$ نحصل على ،

$$0 < |x-4| < \delta$$

$$0 < |x-4| < \frac{\in}{3}$$

$$0 < 3|x-4| < \in$$

$$0 < |3x-12| < \in$$

$$0 < |(3x-5)-7| < \in$$

هذه المتباينات المتكافئة تحقق المطلوب وأكملت البرهان.

مثال(7):

اثبت أن $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$

الحــل

نفرض أن $\in > 0$ ،

$$|x^3 - a^3| < \in$$

$$|(x-a)(x^2+ax+a^2)| < \in$$

$$|x-a|\ |x^2+ax+a^2| < \in$$

$$|x-a| < \frac{\in}{|x^2+ax+a^2|}$$

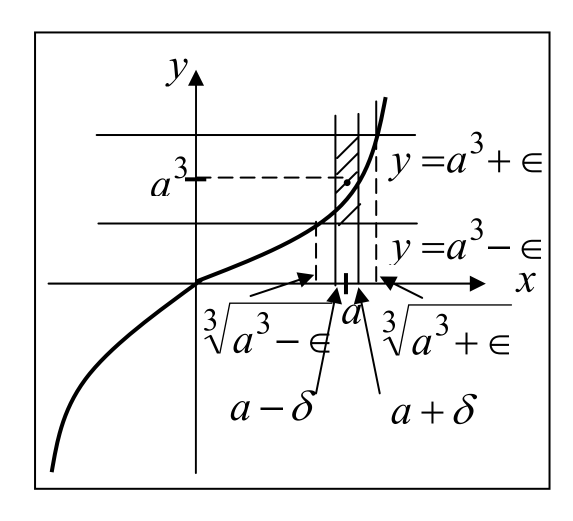
$$0 < |x-a| < \frac{\in}{a^2}$$

$\therefore$ لكل $\in > 0$ ، بأخذ $\delta = \frac{\in}{a^2}$ ، يكون

$$0 < |x-a| < \delta$$

$\therefore$ $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$

طريقة أخرى للحل



لنفرض الحالة $a > 0$ ، و $f(x) = x^3$ و $L = a^3$ ومن ثم أي $\in > 0$ علينا أن نجد $\delta > 0$ بحيث " إذا x في الفترة $(a - \delta, a + 8)$ و $x \neq a$ فإن x^3 في الفترة $(a^3 - \in, a^3 + \in)$ "

شكل (47)

بفحص شكل (47)، رسمنا الخطان الأفقيان $y = a^3 \pm \in$ اللذان يقطعان بيان المعادلة $y = x^3$

في نقطتين إحداثياتهما الأفقيان، x ، هما $\sqrt[3]{a^3 + \in}$ ، $\sqrt[3]{a^3 - \in}$. النقطة (x, x^3) على المنحنى بين هذين الخطين الأفقيين إذا كانت x تقع في الفترة المفتوحة $\left(\sqrt[3]{a^3 - \in}\ ,\ \sqrt[3]{a^3 + \in}\right)$.

إذا ما اخترنا δ عدد موجب أصغر من كل من ،

$\sqrt[3]{a^3 + \in} - a$ ، $a - \sqrt[3]{a^3 - \in}$ مع بقاء $a^3 - \in > 0$ ، كما هو في الشكل (47) . إذن عندما يكون لـ x سماحية δ عند a ، تكون النقطة (x, x^3) واقعة بين الخطين الأفقيين $y = a^3 \pm \in$ ، أيْ يكون للدالة x^3 سماحية $\in$ عند a^3 .

هذا البحث الهندسي يثبت أنه "إذا كان x في الفترة $(a - 8, a + 8)$، $x \neq a$ فإن x^3 في الفترة $(a^3 - \in\ ,\ a^3 + \in)$" ويمكن تكرار نفس الفحص عندما $a < 0$ وبذلك ثبت المطلوب ، $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$

مثال(8): اثبت باستخدام التعريف أن

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}=2$$

الحـل

نأخذ $a=1$ ، $L=2$ ، $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

$$|f(x)-L|<\in \quad , \quad \in>0$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\in \quad , \quad \in>0$$

$$\left|\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right|<\in$$

$$\left|\frac{(x-1)^2}{x-1}\right|<\in$$

$$|x-1|<\in$$

إذن بأخذ $0<\in$ ، $\delta=\in$ يكون

$$|f(x)-2|<\in \Rightarrow 0<|x-1|<\delta$$

إذن

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

تمارين 2-2

اثبت باستعمال التعريف الرسمي أن النهايات الآتية صحيحة أو باستعمال الرسم.

1) $\lim_{x \to 2} = 2$

2) $\lim_{x \to 5} (-3x) = -15$

3) $\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$

4) $\lim_{x \to 2} (5x - 3) = 7$

5) $\lim_{x \to 5} 4 = 4$

6) $\lim_{x \to a} c = c$ لكل a ، c حقيقيتان

7) $\lim_{x \to c} (ax + b) = ac + b$ لكل الأعداد الحقيقة a ، b ، c .

8) $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$ ، لكل a حقيقية ، $a > 0$

9) $\lim_{x \to a} x^4 = a^4$ ، لكل a حقيقية ، $a > 0$

10) $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ ، لكل a حقيقية ، $a > 0$

11) $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$ ، لكل a حقيقية ، $a > 0$

12) كرر التمارين 8 ، 9 ، 11 لكل a حقيقية ، $a < 0$

13) استعمل طريقة الرسم المستعملة في مثال (7) لإثبات أن النهايات الآتية غير موجودة .

$\lim_{x \to 1} \sqrt{x - 1}$ ، $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1}$ ، $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ ، $\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{|x + 1|}$

بند 2-3 : أساليب ايجاد النهايات

إنه لمن المجهد لتحقيق أيْ نهاية باستخدام التعريف. وذلك فإن هدف هذا البند هو تقديم مبرهنات تستخدم لتبسيط مسائل النهايات. لنبدأ بأبسط الدوال وهي $f(x)=c$ نجد أن

$$|f(x)-c| = |c-c| = 0$$

وحيث أن $\in > 0$ لكل $0 < \in$ ينتج أن $f(x)$ نهايتها c
كلما اقتربت x من أي عدد حقيق a .

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c \quad (1)$$

أيْ أن نهاية مقدار ثابت هي المقدار الثابت نفسه . وبالمثل يمكن إثبات أن،

$$\lim_{x\to a} x = a \quad (2)$$

المعادلتان (1) ، (2) تعتبران أول مبرهنة في هذا البند

فمثلاً

$$\lim_{x\to 11} 7 = 7 \quad ، \quad \lim_{x\to 3} 8 = 8$$

$$\lim_{x\to \sqrt{2}} x = \sqrt{2} \quad ، \quad \lim_{x\to 5} x = 5$$

وهذه المبرهنة على بساطتها سنرى أنها تستخدم لإيجاد نهايات معقدة ومركبة، باستعمال المبرهنات الآتية :

مبرهنة:

إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = M$ موجودتان ، فإن

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L+M \quad (3)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = LM \quad (4)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{L}{M} \quad ,M\neq 0 \quad (5)$$

$$\lim_{x\to a}[cf(x)]=cL \; , \quad \text{أي عدد } c \quad (6)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L-M \quad (7)$$

أيْ أننا نستطيع تذكر المعادلات من 3- إلى 7 على النحو

3) نهاية المجموع = مجموع النهايات

4) نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب النهايتين .

5) نهاية خارج القسمة = خارج قسمة النهايتين بشرط عدم انعدان المقام .

6) نهاية مضروب دالة في مقدار ثابت = نهاية الدالة في المقدار الثابت .

7) نهاية الفرق هو فرق النهايتين .

نتيجة(1):

$$\lim_{x\to c}(ax+b)=ac+b \quad (8)$$

لأن ،

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(ax+b)&=\lim_{x\to c}ax+\lim_{x\to c}b\\&=a\lim_{x\to c}x+b\\&=ac+b\end{aligned}$$

نتيجة(2):

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=L^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n \quad (9)$$

لأن ،

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\lim_{x\to a}[f(x).f(x)........]$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} f(x) ....$$

$$= \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

$$= L^n$$

مثال (9):

أوجد النهايات الآتية

$$\lim_{x\to a} x^3 \quad ، \quad \lim_{x\to 2} \frac{3x+4}{5x+7}$$

$$\lim_{x\to -2} \left(5x^3 + 3x^2 + 33\right) \quad ، \quad \lim_{x\to -1} (3x+1)^5$$

الحـــل

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x+4}{5x+7} = \frac{\lim_{x\to 2}(3x+4)}{\lim_{x\to 2}(5x+7)} = \frac{3(2)+4}{5(2)+7} = \frac{10}{17}$$

$$\lim_{x\to 2} x^3 = \left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 = a^3$$

$$\lim_{x\to -1} (3x+1)^5 = \left[\lim_{x\to -1} (3x+1)\right]^5 = (-2)^5 = -32$$

$$\lim_{x\to -2} \left(5x^3 + 3x^2 + 33\right) = 5(-2)^3 + 3(-2)^2 + 33$$

$$= -40 + 12 + 33 = 5$$

مبرهنة:

1) إذا كانت f كثير حدود ، a عدد حقيقي فإن

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad (10)$$

2) إذا كان q دالة قياسية ، a عدد حقيقي فإن

$$\lim_{x\to a} q(x) = q(a) \quad (11)$$

البرهان:

إذا كان

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(b_n x^n\right) + \lim_{x\to a}\left(b_{n-1}x^{n-1}\right) + \ldots + \lim_{x\to a} b_0 \\ &= b_n\left[\lim_{x\to a} x\right]^n + b_{n-1}\left[\lim_{x\to a} x\right]^{n-1} + \ldots + b_0 \\ &= b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \ldots + b_0 \\ &= f(a)\end{aligned}$$

ولبرهان فقرة (2) نفرض ، $f(x)$ ، $h(x)$ كثيري حدود ،

$$q(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$$

$$\lim_{x\to a} q(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} h(x)} = \frac{f(a)}{h(a)} = q(a)$$

ونترك للطالب برهان ما يلي من مبرهنات ،

لأجل $a > 0$ ، n عدد حقيقي صحيح

أو $a < 0$ ، n عدد حقيقي فردي

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad (12)$$

لأجل m ، n أعداد صحيحة موجبة،

$$\lim_{x\to a} x^{m/n} = a^{m/n} \quad (13)$$

لأجل r عدد حقيقي موجب ،

$$\lim_{x\to a} x^{r} = a^{-r} \quad (14)$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \quad (15)$$

<u>مبرهنة السندوتش Sandwich Theorem</u>

إذا كان لدينا $f(x) \le h(x) \le g(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على a.
وكان

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} g(x)$$

فإن

$$\lim_{x\to a} h(x) = L$$

فإذا كانت $a \le h \le b$ ، $a = 4$ ، $b = 4$
فلابد أن $4 \le h \le 4$ أي $h = 4$.

مثال (10):

استخدم مبرهنة السندوتش لإثبات أن

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

الحــل

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \le 1$$

بما أن $x = 0$ نستطيع الضرب في x^2 ،

$$-x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \le x^2$$

بأخذ النهاية لما $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(-x^2\right) < \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) < \lim_{x\to 0} x^2$$

$$0 < \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) < 0$$

إذن ،

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

مثال (11):

أوجد النهايات ،

$(i$ $\displaystyle \lim_{x\to 8}\frac{x^{2/3}+3\sqrt{x}}{4-\frac{16}{x}}$ $\qquad$ $(ii$ $\displaystyle \lim_{x\to 5} \sqrt[3]{3x^2-4x+9}$

$(iii$ $\displaystyle \lim_{x\to 2^+}\left(1+\sqrt{x-2}\right)$ $\qquad$ $(iv$ $\displaystyle \lim_{v\to c^+}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

الحــل

$(i$
$$\lim_{x\to 8}\frac{x^{2/3}+3\sqrt{x}}{4-\frac{16}{x}} = \frac{8^{\frac{2}{3}}+3\sqrt{8}}{4-\frac{16}{x}} = \frac{4+6\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$$

$(ii$
$$\lim_{x\to 5}\sqrt[3]{3x^2-4x+9} = \sqrt[3]{75-20+9} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$(iii$
$$\lim_{x\to 2^+}\left(1+\sqrt{x-2}\right) = \left(1+\sqrt{2^+-2}\right) = 1$$

لأن 2^+ تقع في نطاق $\sqrt{x-2}$.

مثال (12):

أوجد النهاية ،
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

الحــل

واضح أن $f(0)=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$ قيمة غير معرفة

ولكن إذا ضربنا البسط والمقام في مرافق البسط تصبح

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

بما أن $x\neq 0$ إذن تحذف x من البسط والمقام وتصبح

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+D}+\sqrt{1-D}}=\frac{2}{1+1}=1$$

مثال (11):

أوجد النهاية الآتية باستخدام مبرهنات النهايات ، إذا كانت موجودة

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)$$

الحــل

$$f(h)=\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)$$

$$f(0)=\left(\frac{1}{0}\right)\ (1-1)=\infty\times 0$$

أيْ أن $f(0)$ غير معرفة، وبإجراء بعض الاختصارات الجبرية ،

$$f(h)=\left(\frac{1}{h}\right)\ .\frac{\left(1-\sqrt{1+h}\right)}{\sqrt{1+h}}$$

ضرب في المرافق ،

$$=\frac{1}{h}\ .\frac{\left(1-\sqrt{1+h}\right)}{\sqrt{1+h}}.\frac{\left(1+\sqrt{1+h}\right)}{\left(1+\sqrt{1+h}\right)}$$

$$=\frac{1}{h}\ .\frac{1-\left(\sqrt{1+h}\right)}{\left(\sqrt{1+h}+1+h\right)}$$

$$=\frac{1}{h}\ .\frac{1-h}{\sqrt{1+h}+1+h}$$

$$\lim_{x\to 0} f(h)=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+h}+1+h}$$

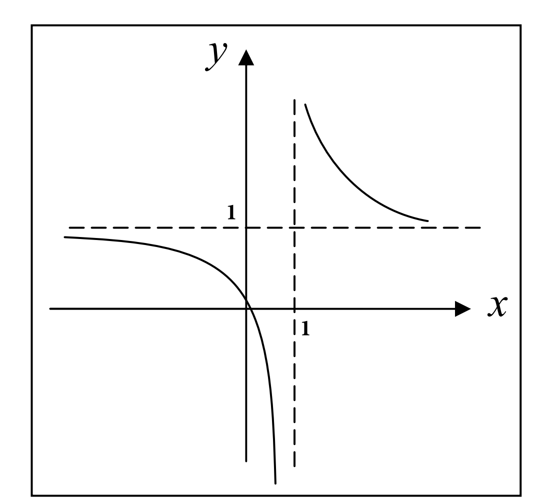
$$=\frac{-1}{\sqrt{1+0}+1+0}=-\frac{1}{2}$$

النهايات التي تشمل الملانهاية

عند إيجاد النهاية اليمنى أو اليسرى لدالة f عند a قد نجد $f(x)$ متزايدة بلا حدود أو متناقصة بلا حدود.

ولتصور ذلك دعنا نعتبر الدالة

$$f(x)=\frac{x}{x-1}$$



شكل (48)

$gr(f)$ موضح في شكل (48) ويمكننا تبيان أن ،

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} \quad \text{غير موجودة}$$

والجدول الآتي يوضح بعض قيم الدالة

بالقرب من $x = 1$.

x	0.97	0.98	0.99	1	1.01	1.02	1.03
$f(x)$	-32.3	-49	-99	?	101	51	34.3

نجد أنه كلما اقتربت x من اليمين نحو $x = 1$ ، $f(x)$ تتزايد بدون حدود بمعنى أننا نستطيع أن نجعل $f(x)$ كبيرة حسب الرغبة باختيار x قريبة من 1 بالحد الكاف ولكنها أكبر من 1، مثل $x = 1.00001$ حيث تكون $f(1.00001) = 1.00001$ ، فنقول ،

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = \infty$$

أو $\frac{x}{x-1} \to \infty$ كلما $x \to 1^+$

الرمز ∞ (مالانهاية) لا يمثل عدد حقيقي، وإنما هو رمز اصطلاحى نستعمله لتبيان سلوك الدالة. و ثم على الرغم من أننا قد نقول كلما اقتربت x إلى 1 من اليمين، اقتربت $\frac{x}{x-1}$ من ∞ (أو تؤول إلى ∞).

إلا أننا لا نعنى أن ، $\lim_{x \to 1^+} [x/(x-1)]$ موجودة .

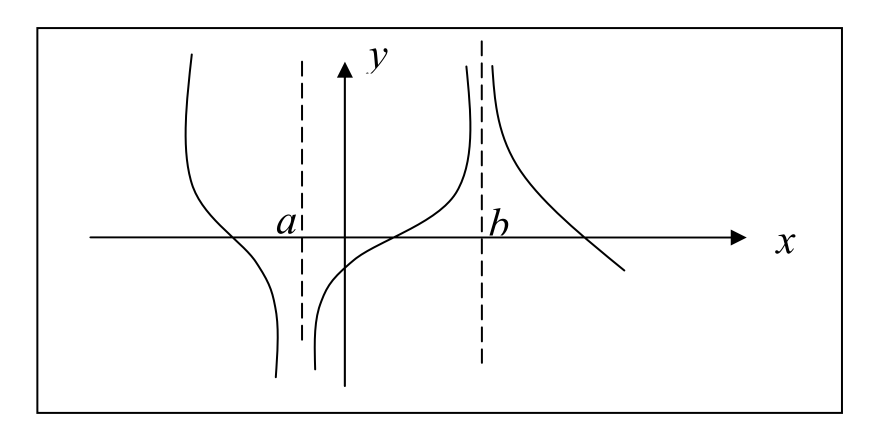
أما الرمز ($-\infty$) (ناقص مالانهاية) فلنستعمل بأسلوب مشابه ليعطى دلالة على أن $f(x)$ تتناقص بدون حدود (تأخذ قيمة سالبة كبيرة جداً)

فمثلاً عندما $x = 0.9999$ ، $f(0.9999) = -9999$ لذلك نقول أن،

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

أو $-\infty \leftarrow \frac{x}{x-1}$ كلما $x \to 1^-$

لنعتبر الآن النهاية من الجانبين الموضحة في شكل (49) لدالة اختيارية



شكل (49)

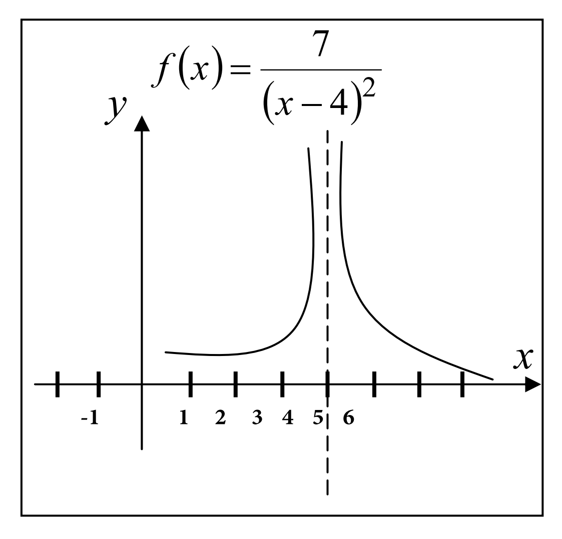
f . نسمى الخطان $x = b$ ، $x = a$ خطوط رأسية تقاربية (Asymptotes Vertical) للدالة f . لاحظ أنه لأجل $f(x)$ تقترب من ∞، $x \to b$ من كلا الجانبين الأيمن والأيسر. ولأجل $f(x)$ تقترب من $-\infty$ ، $x \to a$ من كلا الجانبين الأيمن والأيسر.

إذا كانت نهاية $f(x)$ من أحد الجانبين هي ∞ ومن الجانب الآخر $-\infty$ ، كما في شكل (48)، نقول أن $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة.

مثال (12):

أوجد $\lim_{x \to 4} \frac{7}{(x-4)^2}$ ، إذا كانت موجودة

الحـــل



إذا كانت x قريبة من 4، $x \neq 4$، فإن $(x-4)^2$ موجب وقريب من 0 .

من ثم، فمقلوب $(x-4)^2$، $\frac{1}{(x-4)^2}$، موجب ومتناهي في الكبر .

لا يوجد عدد حقيقي

أيْ نهاية للمقدار $\frac{1}{(x-4)^2}$ أو $\frac{7}{(x-4)^2}$ محددة لما x تقترب من 4

النهاية إذن غير موجودة، لأننا نستطيع أن نجعل $\frac{7}{(x-4)^2}$ كبيرة كما نريد على حسب اختيار x قريبة بالقدر الكافي من 4. وبما أن $\frac{7}{(x-4)^2}$ تتزايد بدون حدود ، نكتب

$$\lim_{x\to 4}\frac{7}{(x-4)^2}=\infty$$

بيان الدالة $f(x)=\frac{7}{(x-4)^2}$ موضح في شكل (50) . الخط $x=4$ هو خط تقاربي رأسي للدالة f .

مثال (13):

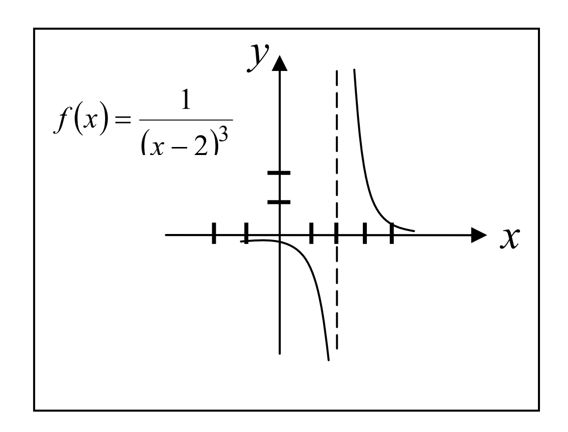
أوجد ما هو موجود من النهايات الآتية

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3} \text{ ، } \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^3} \text{ ، } \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^3}$$

الحـــل

في جميع الحالات الثلاث، النهاية غير موجودة لأن المقام يؤول إلى صفر عندما x تؤول إلى 2.

وبالتالي يؤول الكسر إلى قيمة غير محدودة.



شكل (51)

1) عندما x قريبة من 2 ، $x<2$ ،

$x-2$ قريبة من 0

وسالب $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^3}=-\infty$

2) عندما x قريبة من 2 ، $x>2$ ، $x-2$ قريبة من 0

وسالب $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^3}=\infty$

3) لأن النهايتين من كل جانب أحدهما ∞ والأخرى $-\infty$، نستطيع استنتاج،

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3}\rightarrow \text{غير موجودة}$$

بيان المعادلة $y=\frac{1}{(x-2)^3}$ مرسوم في شكل (51) . والخط $x=2$ هو خط تقاربي رأسي

.

نناقش الآن قطاع من الدوال تقترب قيمتها من عدد L عندما تصبح $|x|$ كبيرة جداً .

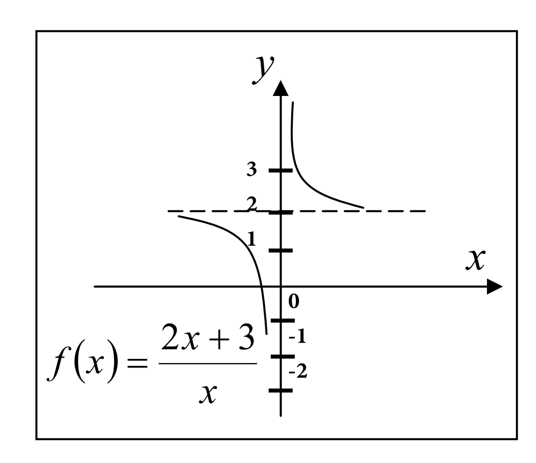
لنعتبر الدالة ، $f(x)=\frac{2x+3}{x}$ والموضح بيانها في شكل (52)

ولنكتب الدالة على الصورة

$$f(x)=2+\frac{3}{x}$$

واضح أنه من الممكن جعل $f(x)$ قريبة من 2 بقدر كاف باختيار x كبيرة بالقدر الكافي فنكتب ،

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)=2$$



شكل (52)

وتذكر دائماً أن ∞ ليست عدد حقيقي وأنه لا يمكن التعويض عن x ، ∞، نحن نفكر في x بأنها تتزايد بدون حدود أو أنها عدد كبير جداً . فإذا جعلنا تتناقص بدون حدود ، أيْ جعلناها تأخذ قيمة سالبة متناهية في الكبر فإن $f(x)$ تؤول مرة أخرى إلى 2 .

فنكتب

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)=2$$

ونصيغ الآن تعريفاً دقيقاً للنهاية عندما تزداد x بدون حدود .

<u>تعريف 1</u>

إذا كانت f معرفة في فترة لانهائية (c,∞)، c عدد حقيقي، L عدد حقيقي . فإن

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L$$

تعنى أنه لكل $\in>0$ ، يوجد عدد $M>0$ بحيث إذا كان $x>M$ ، فإن

$$|f(x)-L|<\in$$

تعريف 2

إذا كانت f معرفة في فترة لانهائية $(-\infty, c)$، c عدد حقيقي، L عدد حقيقي. فإن

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

تعنى أنه لكل $\in > 0$ ، يوجد عدد $N < 0$ بحيث إذا كان $x < N$، فإن

$$|f(x) - L| < \in$$

ومن النتائج الهامة التي نستعملها في هذا النوع من النهايات ،

1) $\lim_{x \to \pm\infty} c = c$ ، c أي عدد قياسي حقيقي .

2) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$ ، k أي عدد قياسي حقيقي .

وبشرط x^k معرفة دائماً .

مثال (14):

أوجد $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 2}$

الحـــل

بقسمة البسط والمقام x وات أعلى أس ، x^2 ، نحصل على

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(2 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{4 + 0 - 0}{2 + 0 + 0} = 2$$

وينتج أن $y = 2$ هو خط تقارب أفقي لبيان الدالة $f = \frac{4x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 2}$

مثال (15):

أوجد النهايتين ،

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^4+3x-1}}{x^2+x+3} \quad (ii \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-5}{3x^2+x+2} \quad (i$$

الحــل

(i

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-5}{3x^2+x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{5}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}$$

$$= \infty = \frac{2-0^+}{0^+ + 0^+ + 0^+} = \frac{2}{0^+}$$

(ii

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^4+3x-1}}{x^2+x+3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^4+3x-1}}{x^2}}{\frac{x^2+x+3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4+0^+ - 0^+}}{1+0^+ + 0^+} = \frac{2}{1} = 2$$

الخط $y = 2$ هو خط تقاربي أفقي لبيان الدالة .

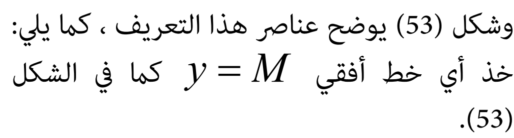
تعريف (3)

إذا كانت f معرفة في فترة مفتوحة تحتوى a، ماعدا أحياناً عند a، فإننا لو كتبنا

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

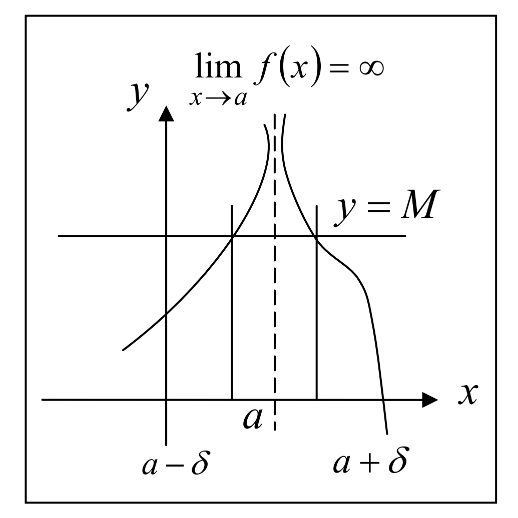
تعنى أنه لكل $M>0$، يوجد عدد $\delta>0$ بحيث إذا كان $0<|x-a|<\delta$، فإن

$$f(x)>M$$



وشكل (53) يوضح عناصر هذا التعريف ، كما يلي:

خذ أي خط أفقي $y=M$ كما في الشكل (53).



شكل (53)

إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$، فإنه كلما كانت x في فترة مناسبة $(a-\delta,a+\delta)$، $x\neq a$، تكون نقط المنحنى الذي يبين f واقعة فوق الخط الأفقي.

ويمكن تغيير التعريف باستبدال $M>0$ بـ $N<0$ و $f(x)>M$ بـ $f(x)<N$ لنحصل على تعريف $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

فإذا اتخذنا أيْ خط أفقي $y=N$ (N سالبة) ، فإن $gr(f)$ يقع أسفل هذا الخط كلما كانت x في فترة مناسبة $(a-\delta,a+\delta)$ ، $x\neq a$.

مثال (16):

أوجد النهايات الآتية :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x} \quad ، \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x}$$

الحـل

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2^x+3^x-5}{3^x}}{\frac{4+3^{x+1}-2^x}{3^x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1-\frac{5}{3^x}}{\frac{4}{3^x}+3-\left(\frac{2}{3}\right)^x}$$

بما أن $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ ، $\lim_{x\to\infty} 3^x = \infty$

إذن $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x} = \frac{0+1-0}{0+3-0} = \frac{1}{3}$

لإيجاد النهاية $x \to -\infty$ يمكننا استبدال x بـ $-t$ ، $t \to \infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{2^t}+\frac{1}{3^t}-5}{4+\frac{3}{3^t}-\frac{1}{2^t}}$$

بضرب البسط والمقام في 2^t

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 5x2^t}{4 \times 2^t + 3\left(\frac{2}{3}\right)^t - 1}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1 - 5x2^t}{4 \times 2^t - 1}$$

بالقسمة على 2^t

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{2^t} - 5}{4 - \frac{1}{2^t}}$$

$$= \frac{0 - 5}{4 - 0} = -\frac{5}{4}$$

<u>حل آخر</u>

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x + 3^x - 5}{4 + 3^{x+1} - 2^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^x + 3^x - 5}{4 + 3 \times 3^x - 2^x}$$

باستعمال القاعدة $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ ، $a > 1$

$$\text{النهاية} = \frac{0 + 0 - 5}{4 + 3 \times 0 - 0} = -\frac{5}{4}$$

تمارين 2-3

أوجد النهايات الآتية إن وجدت بدون استعمال التعريف وباستعمال المبرهنات.

1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} 6$

2) $\lim\limits_{x\to 1/2} (6x-2)^{20}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 3^-} x\sqrt{9-x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 6} \sqrt{3}$

6) $\lim\limits_{x\to -2} \left(3x^3-2x+7\right)$

7) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+5x+6}$

8) $\lim\limits_{x\to 5^+} \left(\sqrt{x^2-25+3}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to -4} x$

10) $\lim\limits_{x\to 4} \left(5x^2-9x-8\right)$

11) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^4-16}$

12) $\lim\limits_{k\to 2} \sqrt{3k^2+4}\,\sqrt[3]{3k+2}$

13) $\lim\limits_{x\to 3} x$

14) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \left(x^2+3\right)\left(4-x^2\right)$

15) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$

16) $\lim\limits_{v\to 3} v^2(3v-4)\left(9-v^3\right)$

17) $\lim\limits_{x\to 4} 3x-4$

18) $\lim\limits_{t\to 3} (3t+4)(7t+9)$

19) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(1/x)-(1/2)}{x-2}$

20) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x^6-64}$

21) $\lim\limits_{x\to -2} (-4x+2)$

22) $\lim\limits_{t\to\pi} (t-3.1416)$

23) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{(1/x)+(1/3)}$

24) $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{h}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{2+h}}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

(25 $\lim_{x\to -2} \dfrac{x-5}{4x+3}$

(26 $\lim_{x\to \pi} \left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{11}{7}\right)$

(27 $\lim_{x\to 1} \left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$

(28 $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

(29 $\lim_{x\to 4} \dfrac{2x-1}{3x+1}$

(30 $\lim_{x\to 4} \dfrac{6x-1}{2x-9}$

(31 $\lim_{x\to 16} \dfrac{2\sqrt{x}+x^{3/2}}{\sqrt[4]{x}+5}$

(32 $\lim_{x\to -8} \dfrac{16x^{3/2}}{4-x^{4/3}}$

(33 $\lim_{x\to 1} (-2x+5)^4$

(34 $\lim_{x\to -4} \dfrac{4x^2-6x+3}{16x^2+8x-7}$

(35 $\lim_{x\to -4} \sqrt[3]{x^2-5x-4}$

(36 $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^5-1}$

(37 $\lim_{x\to -2} (3x-1)^5$

(38 $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{2x^2-3}{6x^2-7x+2}$

(39 $\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4-4x+1}$

(40 $\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2+5x-3x^3}{x^2-1}}$

(41 $\lim_{x\to 3} (3x-8)^{100}$

(42 $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^3-8}$

(43 $\lim_{x\to \pi} \sqrt[5]{\dfrac{x-\pi}{x+\pi}}$

(44 $\lim_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x}$

(45 $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$

(46 $\lim_{x\to -10^-} \dfrac{x+10}{\sqrt{(x+10)^2}}$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 16}}{x + 4} \qquad (47$$

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{1 + \sqrt{2x - 10}}{x + 3} \qquad (48$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x} - \sqrt{3x - 2}} \qquad (49$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}}{x} \qquad (50$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2x + \sqrt{x - 2}}{\sqrt{x^2 - 4}} \qquad (51$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + 1)^5 - 1^5}{x} \qquad (52$$

$$\lim_{x \to 1.5} \frac{1 - [x]}{x - 1} \qquad (53$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| + 1}{[1 + x]} \qquad (54$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{2}}{x^2 - 3x + 2} \qquad (55$$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \qquad (56$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3^x - 2^x}{x^3 - x^2} \qquad (57$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3 \times 2^x - 6^x + 1}{x + 1} \qquad (58$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{9^x - 4^x}{3^x - 2^x} \qquad (59$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 3x + 7}{2x^2 + x + 3} \qquad (60$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 7}{6x + 2x^3} \qquad (61$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4 - 7x}{2 + 3x} \qquad (62$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(3x + 4)(x - 1)}{(2x + 7)(x + 2)} \qquad (63$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x - 3}{x^3 + 9} \qquad (64$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-x^3 + 3x}{2x^2 - 11} \qquad (65$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 1} \qquad (66$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{6 + 2x^2}{2x(x + 7)}} \qquad (67$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x - 3}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad (68$$

$$\lim_{x \to \infty} \sin x \qquad (69$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{x + 2} \qquad (70$$

أوجد كل النهايات الآتية إذا كانت موجودة .

أ) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ جـ) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

71) $f(x) = \sqrt{5 - x} \;\; a = 5$; 72) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1} \;;\; a = 1$

73) $f(x) = \sqrt{8 - x^3} \;\; a = 2$; 74) $f(x) = x^{2/3} \;;\; a = -8$

إذا كانت n عدد صحيح . ارسم بيان f وأوجد النهايتين

$\lim\limits_{x \to n^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

75) $f(x) = (-1)^n \;,\; n \le x < n + 1$

76) $f(x) = n \;,\; n \le x < n + 1$

77) $f(x) = \begin{cases} x & , \; x = n \\ 0 & , \; x \ne n \end{cases}$

78) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x = n \\ 1 & , \; x \ne n \end{cases}$

79) $f(x) = [x]$ 80) $f(x) = -[x]$

81) $f(x) = x - [x]$ 82) $f(x) = [x] - x$

استعمل مبرهنة سندويتش لتحقيق النهاية المعطاة $(83 \to 86)$

83) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1$ 84) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}}$

85) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ 86) $\lim\limits_{x \to 0} x^4 \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0$

87) إذا كانت $0 \le f(x) \le c$ لعدد حقيقي c. اثبت أن $\lim\limits_{x \to 0} x^2 f(x) = 0$

88) اذكر سبب ما يأتي ،

أ) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \neq \left(\lim_{x\to 0} x\right)\left(\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\right)$

ب) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+x\right) \neq \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0} x$

89) إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

اثبت أن $\lim_{x\to a}\left[f(x)/g(x)\right]$ غير موجودة .

(إرشاد : أفرض وجود عدد M بحيث $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = M$

واعتبر أن $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x).g(x)}{g(x)}$

90) أوجد النهايتين

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ ، $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

91) أوجد ،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x-3^{x+1}+5}{2^{2x-1}+12}$$

في التمارين من (92) إلى (99) أوجد النهايات الآتية على شكل ∞، $-\infty$ أو DNE (اختصار كلمة Does not exist وتعني غير موجودة) .

أ) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ب) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ جـ) $\lim_{x\to a} f(x)$

92) $f(x) = \frac{3}{x-4}\ ,\ a=4$ 93) $f(x) = \frac{5}{2-x}\ ,\ a=2$

94) $f(x)=\dfrac{8}{(2x+5)^3}$, $a=-\dfrac{5}{2}$ 95) $f(x)=\dfrac{-4}{7x+3}$, $a=-\dfrac{3}{7}$

96) $f(x)=\dfrac{3x^2}{(2x-9)^2}$, $a-\dfrac{9}{2}$ 97) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-x-2}$, $a=-1$

98) $f(x)=\dfrac{1}{x(x-3)^2}$, $a=3$ 99) $f(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$, $a=-1$

في التمارين من (100) إلى (103) الدالة f تحقق الشروط المعطاة، ارسم الشكل الممكن للدالة f ، مفترضاً أن بيانها لا يقطع أي خط تقارب أفقي .

100) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ ، $\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to3^+} f(x)=\infty$

101) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x)=-1$ ، $\lim_{x\to2^-} f(x)=\infty$ ، $\lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty$

102) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$ ، $\lim_{x\to3^-} f(x)=\infty$ ، $\lim_{x\to3^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to1^+} f(x)=\infty$ ، $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$

103) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x)=3$ ، $\lim_{x\to1^-} f(x)=\infty$ ، $\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-2^+} f(x)=\infty$

في التمارين (104) إلى (117) أوجد الخطوط التقاربية الرأسية والأفقية .

104) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$

105) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x^2-6x}$

106) $f(x)=\dfrac{5x}{4-x^2}$

107) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{16-x^2}$

108) $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$

109) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3}$

110) $f(x)=\dfrac{3x^3}{(x^2+1)(x-1)}$

111) $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x^2-25}$

112) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-16}$

113) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{16-x^2}}{4-x}$

114) $f(x)=1+\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

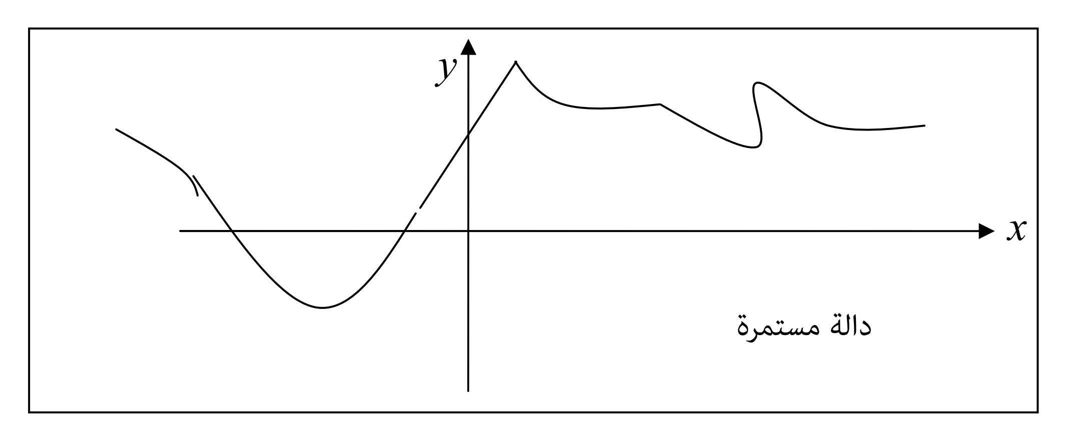
115) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2+3x-5}}$

116) $f(x)=\left|\dfrac{-x^3+8}{x(x-1)(x+2)}\right|$

117) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+7x+12}}{1-\sqrt{x^2-3}}$

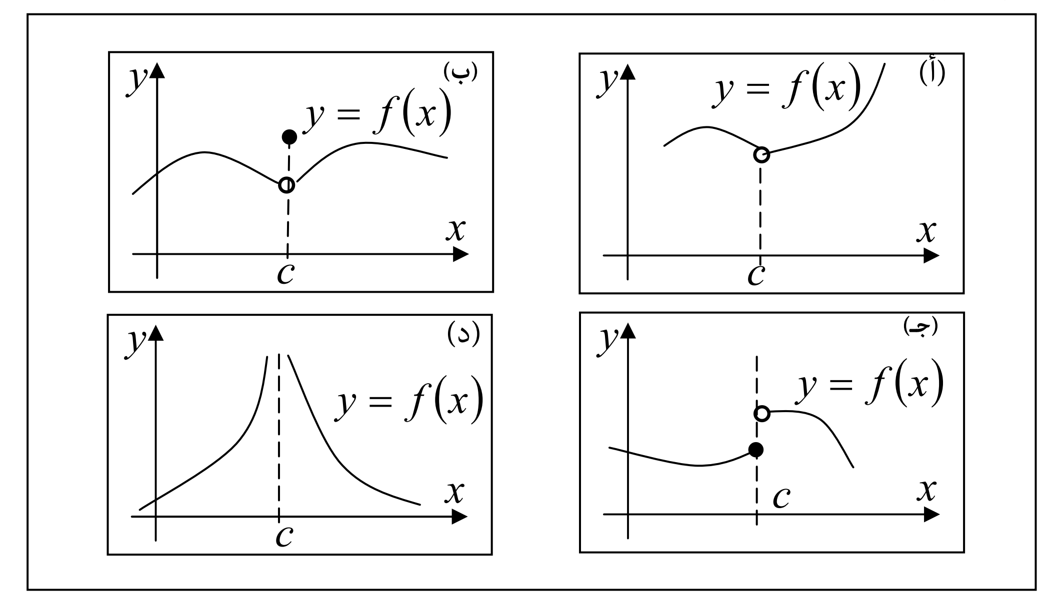
بند 2-4 الدوال المستمرة Continuous functions

الدالة المستمرة أو المتصلة هي الدالة التي يخلو بيانها من كسور أو فجوات أو خطوط تقارب رأسية ، فبيانها عبارة عن منحنى متصل ليس به أىْ تقطعات مثل الموضح في شكل (54)



شكل (54)

أما بيانات الدالة الموضحة في شكل (55) فهي بيانات لدالة غير مستمرة (غير متصلة) عند $x = c$.



شكل (55)

ففي شكل (55(أ)) $f(c)$ غير معرفة وفي شكل (55(ب)) $f(c)$ معرفة إلا أن $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ أما في شكل (55(جـ)) فإن $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة وأخيراً في شكل (55(د)) $f(c)$ غير معرفة بالإضافة إلى أن $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ وبيان $f(x)$ لن يكون من هذه الأنواع إذا حققت f ثلاثة شروط نذكرها في التعريف الآتي

<u>تعريف:</u> "دالة f تكون مستمرة عند عدد c إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية.

(أ) $f(c)$ تكون معرفة . (ب) $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة .

(جـ) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ "

أيْ أن شروط استمرارية الدالة عند c ممكن كتابتها على النحو:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c) =$$ قيمة معرفة

فالشرط (جـ) يكفى لإيضاح أن f مستمرة عند c، لان إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ فهي يعنى أن $f(c)$ لابد معرفة وان النهاية $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة . والشرطان (أ) ، (ب) يتحققان أوتوماتيكيا.

ويطلق على عدم الاستمرار عند c الموضحان في شكل (55(أ) ،(ب، <u>عدم استمرار قابل للإزالة</u> removable discontinuity لأنه من الممكن إزالة عدم الاستمرار بتعريف الدالة بقيمة مناسبة .

أما في شكل (55(جـ)) فتسمى <u>قفزة عدم استمرارية</u> jump discontinuity.

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى ∞ أو $-\infty$ عندما تؤول x إلى c من الجانبين كما في شكل (55(د)) نقول أن للدالة <u>عدم استمرارية لانهائية</u> عند c Infinite discontinuity

فيما يلي نذكر بعض الدوال ونناقض استمراريتها على سبيل التوضيح .

الدالــة	بيـــانها	استمـراريتها
$f(x)=2x$	شكل(56)	لكل قيمة c ، $\lim\limits_{x\to c} f(x)=2c=f(c)$ الدالة مستمرة
$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$	شكل(57)	عند $c=1$ ، نجد $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ إذن الدالة لها ،عدم استمرارية قابلة للإزالة إذا عرفنا ، $f(1)=3$.
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2(x-2)} & , x\neq 2 \\ 1 & , x=2 \end{cases}$	شكل(58)	عند $c=2$ ، نجد $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$ $f(2)=1$ $\therefore$ يوجد عند $c=2$ عدم استمرارية قابلة للإزالة لوعرفنا، $f(2)=2$ بدلا من1
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	شكل(59)	عند $c=0$ $\lvert f(x)\rvert$ يكون لانهائي بطريقة اختيارية كلما اقتربت من 0 الدالة عند 0 لها عدم استمرارية لانهائية .
$f(x)=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$	شكل(60)	عند $c=0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1,\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ النهايتان غير متساويتان. إذن يوجد قفزة عدم استمرار عند $c=0$ (مقدار القفزة =2)

b

الدالـــة	بيـــانها	استمـراريتها
$f(x)=2x$	شكل(56)	لكل قيمة c ، $\lim\limits_{x\to c} f(x)=2c=f(c)$ الدالة مستمرة
$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$	شكل(57)	عند $c=1$ ، نجد $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ إذن الدالة لها ،عدم استمرارية قابلة للإزالة إذا عرفنا ، $f(1)=3$.
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{2(x-2)} & ، x\neq 2\\ 1 & ، x=2\end{cases}$	شكل(58)	عند $c=2$ ، نجد $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$ $f(2)=1$ $\therefore$ يوجد عند $c=2$ عدم استمرارية قابلة للإزالة لوعرفنا، $f(2)=2$ بدلا من1
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	شكل(59)	عند $c=0$ $\|f(x)\|$ يكون لانهائي بطريقة اختيارية كلما اقتربت من 0 الدالة عند 0 لها عدم استمرارية لانهائية .
$f(x)=\dfrac{\|x\|}{x}$	شكل(60)	عند $c=0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1,\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ النهايتان غير متساويتان. إذن يوجد قفزة عدم استمرار عند $c=0$ (مقدار القفزة =2)

<u>مبرهنة:</u>

" 1) كثيرة الحدود f هو دالة مستمرة لكل عدد حقيقي c

2) خارج قسمة q لكثيري حدود f ، g،أي $q=\dfrac{f}{g}$ هو دالة مستمرة عند كل عدد حقيقي c ماعدا الذي يحقق الشرط $g(c)=o$ "

والبرهان منطقي لأن إذا f كثير حدود، c عدد حقيقي، فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

وإذا كان $g(c)\neq 0$ ، فان c في نطاق $q=\dfrac{f}{g}$ ويكون $\lim\limits_{x\to c} f(x)=q(c)$،

أي q مستمرة عند c.

مثال (1)

إذا كانت، $f(x)=|x|+|x-1|$

أثبت أن $f(x)$ مستمرة عند أي عدد حقيقي c.

الحــل:

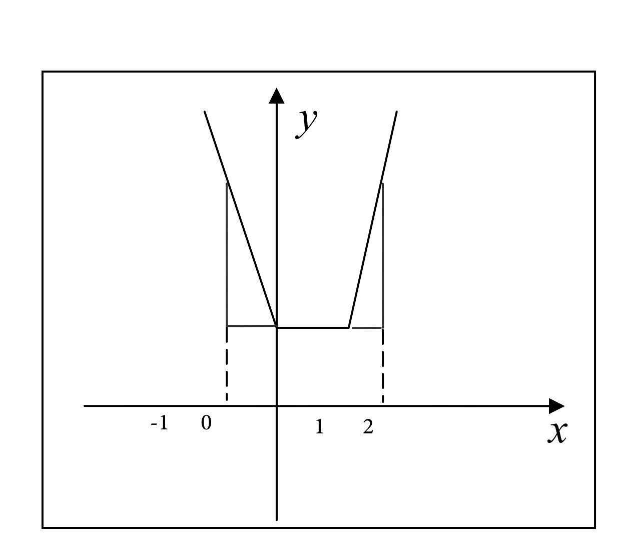
بيان f موضح في الشكل (61)

إذا كانت $x<0$ فإن

$$=-x-(x-1)\,f(x)$$
$$=-2x+1$$

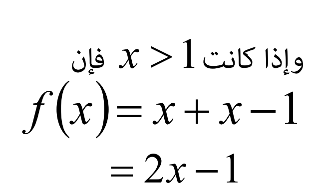
وإذا كانت $0<x>1$ فإن

$$f(x)=x-(x-1)$$
$$=1$$



شكل (61)

وإذا كانت $x>1$ فإن



$$f(x)=x+x-1$$
$$=2x-1$$

وبما أن جميع أجزاء $f(x)$ هي كثيرات حدود مستمرة عند أي نقطة في الفترة المعرف الأ الجزء، بقي أن ندرس الاستمرارية عند $x=0$ وعند $x=1$ عند $x=0$

عند $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} -2x+1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$f(0) = |0| + |0-1|$$
$$= 1$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=0$

وعند $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x-1 = 1$$

$$f(1) = |1| + |1-1|$$
$$= 1$$

$\therefore$الدالة مستمرة عند $x=1$

وينتج أن الدالة f عند أيْ عدد حقيقي c.

مثال (2)

ابحث استمرارية الدالة

$$f(x) = \begin{cases} [x] & , \quad 2 \le x < 3 \\ x^2 - 2 & , \quad x < 2 \\ x - 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

الحــل:

نعلم أن $[x]=2$ عند أية نقطة في الفترة $2 \le x < 3$

إذن يمكن كتابة الدالة على النحو

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x<2 \\ 2 & 2\le x<3 \\ x-1 & x>3 \end{cases}$$

وكل جزء من الدالة مستمر في الفترة المعرف بها.

بقى أن نبحث استمرارية الدالة عند $x=2$ وعند $x=3$.

عند $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(x^2-2\right)=2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} 2=2$$

$$f(2)=2$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=2$.

عند $x=3$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3}\left(x^2-2\right)=2$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3} 2=2$$

$$f(3)=2$$

الدالة مستمرة عند $x=3$

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة على جميع الأعداد الحقيقية R.

مثال (3)

ابحث استمرارية الدالة

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x\notin(-2,2) \\ \dfrac{x}{2} & x\in(-2,2) \end{cases}$$

الحــل:

عندما x لا تنتمي إلى $(-2,2)$ أيْ $x \geq 2$، و$x \leq -2$

عندما $x \geq 2$، يكون

$$\frac{|x|}{x} = \frac{+x}{x} = +1$$

وعندما $x \leq 2$ يكون

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

يمكننا إذن إعادة صياغة الدالة على النحو

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -2 \\ x/2 & -2 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

<u>وعند $x = -2$</u>

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2} (-1) = -1$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to -2} x/2 = -1$$
$$f(2) = 1$$

إذن الدالة مستمرة عند $x = -1$

<u>وعند $x = 2$</u>

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} x/2 = 1$$
$$\lim_{x \to -2+} f(x) = \lim_{x \to 2} 1 = -1$$
$$f(-2) = -1$$
$$x = 2$$

$\therefore$ الدالة مستمرة أيضاً عند $x = 2$

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة على جميع الأعداد الحقيقية R.

مثال (4)

أوجد النقط التي تكون عندها الدالة $f(x)$ غير مستمرة.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1} & x>0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{x^3+8}{x+2} & x<0\end{cases}$$

الحـــل:

عند $x>0$ تكون $1=\dfrac{x+1}{x+1}=\dfrac{|x+1|}{x+1}$

الدالة مستمرة على هذه الفترة (نقطة عدة الاستمرار $x=-1$ لا تقع داخل هذه الفترة)

عند $x<0$ تكون الدالة $\dfrac{x^3+8}{x+2}$ غير مستمرة

عند النقطة $x=-2$ لأن،

غير موجودة $= \; f(-2)=\dfrac{0}{0}$

ومستمرة على بقية الفترة.

عند $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+8}{x+2}=4$$

$$\lim_{x\to -0+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{|x+1|}{x+1}=1$$

$$f(0)=1$$

$\therefore$ الدالة مستمرة أيضاً عند $x=0$

$\therefore$ $f(x)$ غير مستمرة فقط عند $x=2$، $x=0$.

مثال (5)

ابحث استمرارية الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

عند $x=0$

الحـــل:

نبحث نهاية الدالة عند $x\rightarrow 0$، ويناسبنا هنا استعمال مبرهنة الحصر (السندوتش).

$$-1<\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)<1$$

ضرب في x^2، لأنها دائماً موجبة، $x\neq 0$

$$-x<x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x}}<x^2$$

عندما تؤول x إلى صفر

$$0<x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x}}<0$$

$$\lim_{x\rightarrow 0}x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

ومعطى أن $f(0)=0$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=0$.

مثال (6)

أوجد قيمتي a، b اللتان تجعلان الدالة $f(x)$ مستمرة عند a .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-a^2}{x-a} & , \quad x<a\\ 5 & , \quad x=a\\ bx+ax^2 & , \quad x>a\end{cases}$$

حيث a، b عددان حقيقيان.

الحـــل:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}(x+a)$$
$$=2a$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a} bx+ax^2$$
$$=ab+a^3$$
$$f(a)=5$$

ولكي تكون $f(x)$ مستمرة عند a،

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)$$
$$2a=5=ab+a^3$$
$$\Rightarrow \quad a=\frac{5}{2}, \quad 5=\frac{5}{2}b+\frac{125}{8}$$
$$b=-\frac{17}{4} \quad \frac{5}{2}b=-\frac{85}{8}$$

تعريف :

إذا كانت f دالة معرفة على فترة مغلقة $[a,b]$ فإن f تكون مستمرة على $[a,b]$ إذا كانت مستمرة على (a,b) بالإضافة إلى أن،

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \quad ، \quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

مثال (7)

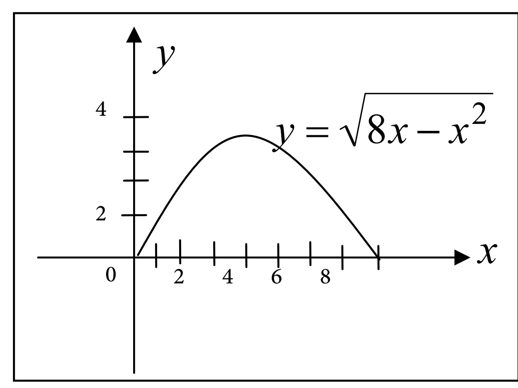
اثبت أن الدالة $f(x)=\sqrt{8x-x^2}$ مستمرة على الفترة المغلقة $[0,8]$.

الحـــل:

شكل (62) يوضح بيان الدالة

$$f(x)=\sqrt{8x-x^2}$$

إذا كانت $0<c<8$،



شكل (62)

فإن
$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}\sqrt{8x-x^2}$$
$$=\sqrt{8c-c^2}$$
$$=\sqrt{(8-c)c}$$
$$=f(c)$$

(لأن إذا كان للدالة $g(x)$ نهاية عند $x=c$ فإن

$$\lim_{x\to c}\sqrt{g(x)}=\lim_{x\to c}\sqrt{g(x)}$$

بشرط أن، $\lim_{x\to c} g(x)>0$ ،

لإذن الدالة مستمرة عند c ويبقى لنا مرجاعة النقطتين الحديتين للفترة $[0,8]$ باستعمال النهايات من جانب واحد.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{8x - x^2} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x(8-x)}$$

$$= \sqrt{0^+ \times 8} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^+} \sqrt{8x - x^2}$$

$$\lim_{x\to 8^-} \sqrt{x(8-x)} = \sqrt{8 \times 0^+}$$

$$= 0 = f(8)$$

إذن الدالة مستمرة من اليمين عند $x = 0$ ومن اليسار عند $x = 8$. ومن التعريف السابق ينتج أن الدالة f مستمرة على الفترة $[0,8]$.

يمكننا تعريف الاستمرارية على الفترة $[a,b)$ أ، $[a,\infty)$ إذا كانت f مستمرة عند $x > a$ في الفترة بالإضافة إلى استمراريتها عند a. كذلك f تكون مستمرة على الفترة $(a,b]$ أ، $(\infty,b]$ إذا كانت مستمرة على كل نقطة في الفترة، $x < b$. ومستمرة عند $x = b$. وإذا كانت الدالتان f ، g مستمرتان عند عدد حقيقي c،

فإن الدوال الآتية مستمرة هي الأخرى عند c،

$f + g$ ، $f - g$ ، fg وكذلك f/g بشرط $g(c) \neq 0$.

نذكر هنا أيضاً عدة مبرهنات يمكن للقارئ برهنتها بسهولة باستعمال مبرهنات النهايات وهي.

1) إذا كان $\lim_{x\to} g(x) = b$ ، كانت f مستمرة b

فإن

$$\lim_{x\to} f(g(x)) = f(b)$$

$$= f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

وينتج من هذه المبرهنة أن،

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} g(x)}$$

و

$$\lim_{x\to c} \sin(g(x)) = \sin\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to c} (\log_a f(x)) = \log_a\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$$

وهكذا.

2) إذا f مستمرة عند c، و g مستمرة عند $f(c)$ فإن الدالة التركيبية gof مستمرة عند c.

أيْ أن،

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right) = g(f(c))$$

فإذا كان $g(x) = |x|$ ، $f(x) = 3x^2 - 7x - 12$

المستمرتان دائماً . فإن $k(x) = g(f(x))$

أيْ $k(x) = (gof)(x)$ مستمرة أيضاً دائماً.

أي أن الدالة $k(x) = \left|3x^2 - 7x - 12\right|$ مستمرة

دائماً (أيْ عند أية قيمة حقيقية c).

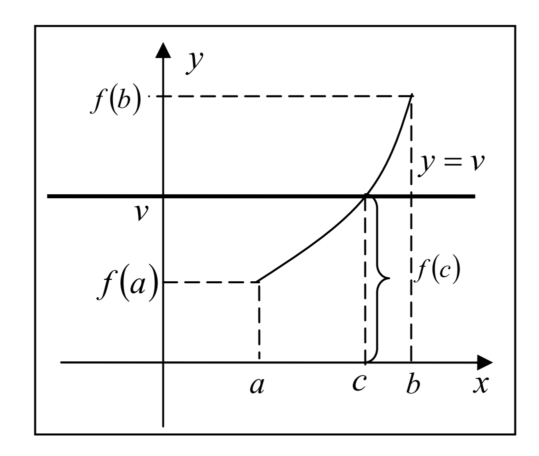
3) إذا f مستمرة على فترة مغلقة $[a,b]$، v أيْ عدد بين $f(a)$ و $f(b)$، فإنه يوجد على الأقل عدد واحد c في $[a,b]$ بحيث يكون،

$$f(c) = v$$

المبرهنة رقم (3) تسمى مبرهنة القيمة الوسطى

"وتنص على أنه بينما تتغير x من a إلى b فإن الدالة المستمرة f تأخذ كل القيم بين $f(a)$ و $f(b)$."

أيْ إذا كان بيان الدالة المستمرة f ممتدا باتصال وبدون كسور من نقطة $(a, f(a))$ إلى نقطة $(b, f(b))$، كما هو واضح في شكل (63) فإن لكل عدد v بين $f(a)$ و $f(b)$، يقطع الخط الأفقي $y = v$ بيان f على الأقل نقطة واحدة p. الإحداثي x أيْ c لنقطة p يكون عنده $v = (f(c))$.
ويتبع من مبرهنة القيمة الوسطى أنه إذا كان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة فإنه يوجد عدد c يقع بين



شكل (63)

a، b بحيث، $f(c) = 0$ أيْ أن f لها جذر أو صفر عند c

وتساعدنا مبرهنة القيمة الوسطى في إيجاد مواضع أصفار الدالة f فمثلاً إذا كان،

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$$

وحسبنا قيم f عند الأعداد الصحيحة من 4- إلى 2 كما يلي،

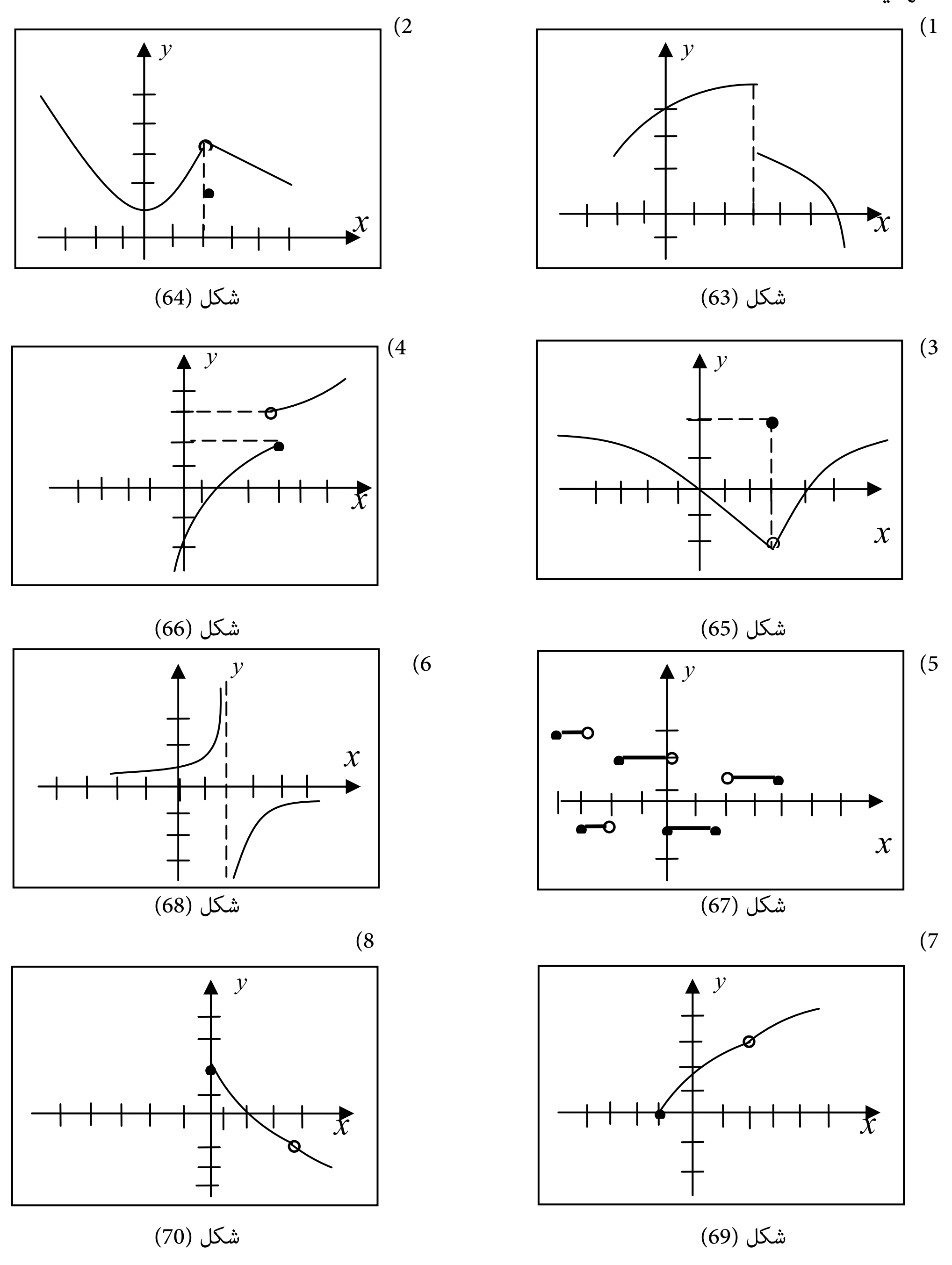
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-139	72	41	2	-3	-4	17

بما أن $f(x)$ كثير حدود فهو إذن مستمر لجميع x ومن مبرهنة القيمة الوسطى نجد أن f لها أصفار c_1، c_2، c_3 حيث $-4 < c_1 < -3$، $-1 < c_2 < 0$، $1 < c_3 < 2$

أيْ أن للدالة f ثلاثة أصفار حقيقية في الفترة $[-4,2]$

تمارين 2 – 4

في التمارين من (1) إلى (8) معطى والمطلوب معرفة نوع عدم الاستمرارية، قابلة للإزالة أو قفزة أم لانهائية.



شكل (63)

شكل (64)

شكل (65)

شكل (66)

شكل (67)

شكل (68)

شكل (69)

شكل (70)

في التمارين من (9) إلى (18) صنف عدم الاستمرارية لـ f قابلة للإزالة، قفزة أم لانهائية.

(9) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & ; \; x<1 \\ 3-x & ; \; x\geq 1 \end{cases}$

(10) $f(x)=\begin{cases} 1+x^3 & ; \; x\leq 1 \\ 2x-1 & ; \; x>1 \end{cases}$

(11) $f(x)=\begin{cases} |x+3| & ; \; x\neq -2 \\ 2 & ; \; x=-2 \end{cases}$

(12) $f(x)=\begin{cases} |x-2| & ; \; x\neq 2 \\ 3 & ; \; x=2 \end{cases}$

(13) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ; \; x<1 \\ 2 & ; \; x=1 \\ x & ; \; x>1 \end{cases}$

(14) $f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & ; \; x<1 \\ 1 & ; \; x=1 \\ x+1 & ; \; x>1 \end{cases}$

(15) $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$

(16) $f(x)=|x-1|+[x]$

(17) $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}\sin\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x^2\right)\right)$

(18) $f(x)=\dfrac{\sin(x^2-1)}{(x-1)^2}$

في التمارين من (19) إلى (30) ابحث استمرارية الدالة عند a.

(19) $f(x)=\sqrt{2x-5}+3x \;\; ,a=4$

(20) $f(x)=\dfrac{3}{x+2} \;\; ,a=-2$

(21) $f(x)=\dfrac{1}{x-2} \;\; ,a=2$

(22) $f(x)=\sqrt{x^2+2} \;\; ,a=-5$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & ;x\neq 3\\ 4 & ;x=3\end{cases} \quad ,a=3 \qquad (23)$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3} & ;x\neq -3\\ 2 & ;x=-3\end{cases} \quad ,a=-3 \qquad (24)$$

$$f(x)=3x^2+7-\frac{1}{\sqrt{-x}} \quad ,a=-2 \qquad (25)$$

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 3\\ 0, & x=3\end{cases} \quad ,a=3 \qquad (26)$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{x-2} & ,x\neq 2\\ 1 & ,x=2\end{cases} \quad ,a=2 \qquad (27)$$

$$f(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2x+1} \;;\; x=8 \qquad (28)$$

$$f(x)=\begin{cases}(\sin)/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \quad a=0 \qquad (29)$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases} \quad ,a=0 \qquad (30)$$

أوجد نقط عدم استمرار الدالة f في تمارين (31) حتى (34) :

(31) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3x-10}$

(32) $f(x)=\dfrac{3}{3x^2-11x+8}$

(33) $f(x)=\dfrac{(x-1)}{2x^2+x-3}$

(34) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}}$

اثبت أن الدالة f مستمرة على الفترة المعطاة في التمارين من (35) إلى (42).

(35) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ $\quad [-3,3]$

(36) $f(x)=\sqrt{x-4}$ $\quad [4,8]$

(37) $f(x)=\sqrt{7-x}$ $\quad (-\infty,7]$

(38) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad (0,\infty)$

(39) $f(x)=x-[x]$ $\quad [1,2)$

(40) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ $\quad (2,3)$

(41) $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$ $\quad [0,3]$

(42) $f(x)=\frac{x+1}{[x+1]}$ $\quad [2,3)$

في التمارين من (43) إلى (62) أوجد قيم c التي تكون عندها الدالة f مستمرة عند $x=2$.

(43) $f(x)=\frac{3x+11}{2x^2-x-3}$

(44) $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$

(45) $f(x)=\sqrt{3x-2}+x^2+1$

(46) $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x-8}}$

(47) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(48) $f(x)=\frac{|x+5|}{x+5}$

(49) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$

(50) $f(x)=\frac{2}{x^3-x}$

(51) $f(x)=\frac{3x+5}{x(x^2+3x-4)}$

(52) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}\sqrt{9-x^2}}{(2x-1)}$

(53) $f(x)=\sqrt{\dfrac{9-x}{x-6}}$

(54) $f(x)=\sec\dfrac{1}{3}x$

(55) $f(x)=\tan 2x$

(56) $f(x)=1+\cot x$

(57) $f(x)=\sin|x|$

(58) $f(x)=\sqrt{(2+x)(3-x)}$

(59) $f(x)=2x^4-\sqrt[3]{x+1}$

(60) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^4-16}$

(61) $f(x)=\dfrac{|x^2-16|}{x^2-16}$

(62) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x}$

في التمارين من (63) إلى (68) أوجد قيم الثوابت الحقيقية c، d التي تجعل f مستمرة على R.

(63)
$$f(x)=\begin{cases} cx^2-3 & ,x\le 2 \\ cx+2 & ,x>2 \end{cases}$$

(64)
$$f(x)=\begin{cases} c^2x-3 & ,x<1 \\ 3cx-2 & ,x\ge 1 \end{cases}$$

(65)
$$f(x)=\begin{cases} c & ,x\le -3 \\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & ,|x|<3 \\ d & ,x\ge 3 \end{cases}$$

(66)
$$f(x)=\begin{cases} 4x & ,x\le -1 \\ cx+d & ,-1<x<2 \\ -5x & ,x\ge 2 \end{cases}$$

(67) $$f(x)=\begin{cases} x+2 & ,x\le c \\ x^2 & ,c<x\le d \\ cx+d & ,x>d \end{cases}$$

(68) $$f(x)=\begin{cases} x+c & ,x<c \\ d & ,x=2 \\ cx+d & ,x>2 \end{cases}$$

في التمارين من (69) إلى (74) حقق مبرهنة القيمة الوسطى للدالة f في الفترة المذكورة $[a,b]$ أيْ وضح أنه إذا كان $f(a)\le v\le f(b)$ فإنه يوجد عدد c في $[a,b]$ بحيث $f(c)=v$.

(69) $f(x)=x^3+1\ ;\ [-1,2]$

(70) $f(x)=2x-x^2\ ;\ [-2,-1]$

(71) $f(x)=\sqrt{9-x^2}\ ;\ [0,3]$

(72) $f(x)=-x^3\ ;\ [0,2]$

(73) $f(x)=x^2-x\ ;\ [1,3]$

(74) $f(x)=x^2+x-2\ ;\ \left[-\frac{1}{2},1\right]$

(75) اثبت أن المعادلة $x^5-3x^4-2x^3-x+1=0$ لها حل حقيقي في الفترة $(0,1)$.

(76) استخدم مبرهنة القيمة الوسطى لتثبت أن بياني الدالتين $f(x)=x^4-5x^2$ و $g(x)=2x^3-4x+6$ يتقاطعان بين $x=3$ و $x=4$.

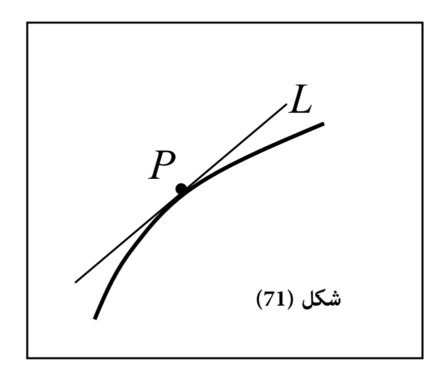
الباب الثالث

المشتقة

بند 3-1 : المماسات ومعدلات التغير

Tangents and Rates of change

أولاً: الخط المماس Tangent line



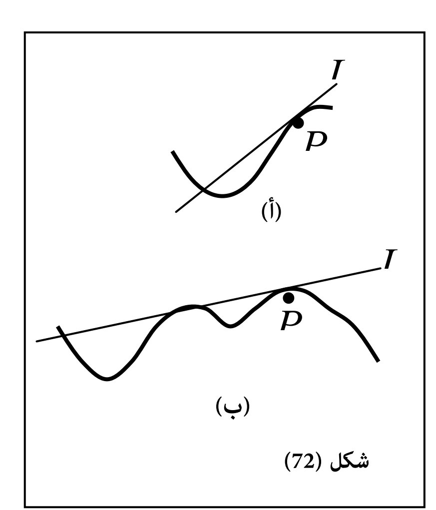
شكل (71)

قد يعرف البعض الخط المماس لمنحنى على أنه الخط المستقيم الذي يقطع المنحنى في نقطة واحدة p كما في شكل (71) إلا أن هذا التعريف ليس مفيداً لجميع بيانات الدوال. لأن المستقيم قد يمس $gr(f)$ عند نقطة معزولة p ثم يعود فيقطع المنحنى أو يمسه مرة أخرى كما في شكل (72) لذلك نجد من الأفضل تعريف ميل المماس عند p ثم إذا أوجدنا الميل m أمكننا إيجاد معادلة المماس L باستعمال معادلة ،

$y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث (x_1, y_1)

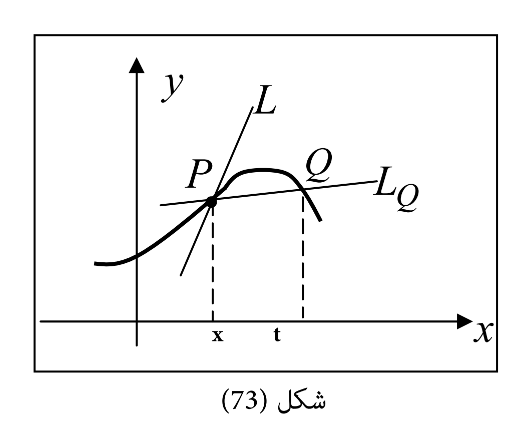
إحداثيا p ، m ميل المماس عندها.

لنفرض أن $p(x, f(x))$ على بيان f والمطلوب إيجاد ميل المماس عند p .

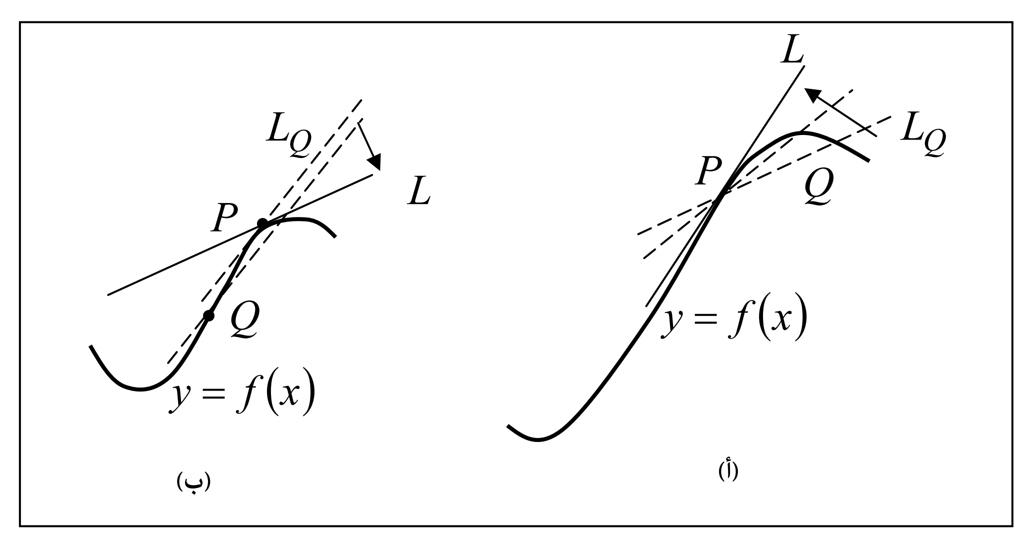


شكل (72)

نختار نقطة أخرى $Q(t, f(t))$ (انظر شكل (73)) ونرمز للقاطع PQ بالرمز L_Q وميل L_Q بالرمز m_Q وميل المماس عند $p(x, f(x))$ بالرمز m.عندما تكون Q قريبة جداً من p يصبح m_Q هو تقريب لقيمة m وكلما اقتربت Q من P أكثر كلما تحسن هذا التقريب فإذا جعلنا Q تقترب من p من اليمين نحصل على الوضع المبين في شكل (74)



شكل (73)



شكل (74)

حيث توضح الخطوط المتقطعة أوضاع L_Q أثناء اقتراب Qمن P وفي الشكل (74ب) نقرب Qمن P من جهة اليسار أو قد نجعل Q تقترب من P من الجهتين. أي بأخذ نقط على المنحنى احدها على اليمين والأخر على اليسار من P.

إذا كان M_Q لها قيمة تنتهي إليها عندما تصبح Q أقرب ما يمكن من P، فإن هذه القيمة هي ميل المماس L. لنكتب الآن ما شرحناه بالمعادلات،

$$M_Q = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

ونلاحظ أنه لكي يكون هناك قاطع يجب أن تختلف Q و P.

أي أن $t \neq x$.إذا كانت f مستمرة عند x ، نستطيع أن نجعل $Q(t, f(t))$ تقترب من $p(x, f(x))$ يجعل t تقترب من x. وهذا يؤدي إلى تعريف ميل المماس m للمستقيم L عند $P(x, f(x))$:

$$M = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t \to x}$$

شريطة أن تكون النهاية موجودة.

ويمكن كتابة هذا التعريف بطريقة أخرى أكثر شيوعا، فإذا وضعنا $t - x = h$ أو $t = x + h$ وعندما $t \to x$ فإن $h \to o$ وتصبح المعادلة،

$$m = \lim_{h \to o} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

مثال (1):

إذا كانت $f(x) = x^2$ ، cعدد حقيقي

أ) أوجد ميل المماس لبيان f عند $x = c$ وعند $x = -2$

ب) أوجد معادلة المماس عند $p(-2,4)$

الحـــل:

أ) $$m = \lim_{h \to o} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

عند $x = c$

$$m(c)=\lim_{h\to o}\frac{(c+h)^2-c^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{c^2+2ch+h^2-c^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{2ch+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}(2c+h)=2c$$

ب) عند $x=-2$ أي $c=-2$

$$m(-2)=2(-2)=-4$$

إذا معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-4=-4(x+2)$$

$$4x+y+4=0$$

ثانياً : معدل التغير

إذا كانت f دالة في x فإنه كلما تغيرت x تتغير $f(x)$ ولو أن $y=f(x)$ فإن أي تغير في x يناظره تغير في y. فإذا تغيرت x من a إلى b فإن التغير في x هو

$$\Delta x=b-a$$

والتغير المناظر في y هو $\Delta y=f(b)-f(a)$

والنسبة بين التغير في y نتيجة تغير x، أيْ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

هي متوسط معدل تغير y بالنسبة إلى x خلال الفترة (a,b) وإذا رمزنا لمتوسط معدل التغير بالرمز y'_{av}، نكتب

$$y'_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

إذا كان التغير في x صغير نسبياً وقدره h أيْ أن x تغيرت من a إلى $a+h$ فإن $\Delta x = h$،

$$y'_{av} = \frac{f(a+b) - f(a)}{h}$$

إذا كانت h تقترب من الصفر، أيْ التغير في x ضئيل جداً فإن معدل التغير يسمى معدل التغير اللحظي عند $x = a$ ويرمز له $y'(a)$

أيْ أن
$$y'_{av} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+b) - f(a)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

وفي الحالة الخاصة التي تكون x الزمن t، y تمثل موضع نقطة على المحور x أيْ $x = t$، $y = s(t)$

فإن السرعة المتوسطة v_{av}، هي متوسط معدل تغير s بالنسبة للزمن t في فترة زمنية معلومة.

والسرعة اللحظية v أيْ السرعة عند لحظة معينة t هي معدل التغير اللحظي للموضع s بالنسبة للزمن.

$$\upsilon_{av} = \frac{s(a+h) - s(a)}{h} \quad , \quad t \in (a, a+h)$$ (السرعة المتوسطة)

، $$\upsilon(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$ (السرعة اللحظية)

مثال (2):

سقط جسيم من ارتفاع 512 مترا عن سطح الأرض بحيث يعطى ارتفاعه عن سطح الأرض $s(t)$ عند زمن t ثانية بالقانون،

$$s(t) = 512 - 16t^2$$

أوجد أ) سرعة الجسيم عن ثانية.

ب) سرعة الجسيم عند إرتطامه بالأرض.

جـ) متوسط سرعة الجسيم خلال حركته.

الحــل:

$$\upsilon(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

أ) وعندما $t = 2$

$$\upsilon(2) = \lim_{h\to 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(512 - 16(2+h)^2\right) - \left(512 - 16(2)^2\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{512 - 16\left(4 + 4h + h^2\right) - 512 + 64}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-64h - 16h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-64h - 16h)$$

$$\upsilon(2) = -64 \qquad m/s$$ (متر / ثانية)

ب) يرتطم الجسم بالأرض عندما $s(t) = 0$ أ،

$$-16t^2 + 512 = 0 \Rightarrow t = 4\sqrt{2}\ s$$

$$\upsilon(4\sqrt{2}) = \lim_{h\to 0} \frac{s(4\sqrt{2} + h) - s(4\sqrt{2})}{h}$$

$$\upsilon(4\sqrt{2}) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[-16(4\sqrt{2}+h)^2 + 512\right] - \left[-16(4\sqrt{2})^2 + 512\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-16\left[\left(4\sqrt{2}+h\right)^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-16\left[4\sqrt{2}+h-4\sqrt{2}\right]\left[4\sqrt{2}+h+4\sqrt{2}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-16 \ h\left(8\sqrt{2}+h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \ -16 \ h\left(8\sqrt{2}+h\right)$$

$$\upsilon\left(4\sqrt{2}\right) = -128\sqrt{2} \cong -181 \ \ m/s$$

جـ) السرعة المتوسطة خلال الفترة من $t = 0$

إلى $t = 4\sqrt{2}$ أيْ $h = 4\sqrt{2}$

$$\upsilon_{av} = \frac{s\left(4\sqrt{2}\right) - s(0)}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-16\left[\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 512\right] - 512}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{0-512}{4\sqrt{2}} = -64\sqrt{2} \ \ m/s$$

$$\cong -90.5 \ \ \ m/s$$

مثال (3):

فرق الجهد في دائرة كهربية مقاومتها R هو 100 فولت بحيث يعطى التيار I خلال المقاومة R من قانون أوم، $I = \frac{100}{R}$ حيث R بالأوم، I بالأمبير.

أوجد المعدل اللحظي لتغير بالنسبة إلى R عند أيْ R وعندما $R = 20$.

الحــل:

معدل تغير I بالنسبة إلى R هو

$$I'(R)=\lim_{h\to 0}\frac{I(R+h)-I(R)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{100}{R+h}-\frac{100}{R}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{100R-100(R+h)}{hR(R+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{100R-100R-100h}{hR(R+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-100h}{hR(R+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-100}{R(R+h)}$$

$$I'(R)=\frac{100}{R^2}$$

وعندما $R=20$ يكون

$$I'(20)=\frac{100}{20^2}=-\frac{1}{4} \qquad Ampere/ohm$$

أيْ أن التيار يتناقص بمعدل $\left(\frac{1}{4}\right)$ أمبير لكل واحد أوم زيادة.

تمارين 3-1

في التمارين من (1) إلى (6)،

أ) أوجد ميل المماس لبيان f عند $p(a, f(a))$ باستعمال التعريف.

ب) أوجد معادلة المماس عندما $a = 2$.

(1) $f(x) = 5x^2 - 4x$ (2) $f(x) = x^3$

(3) $f(x) = 3x + 2$ (4) $f(x) = 3 - 2x^2$

(5) $f(x) = x^4$ (6) $f(x) = 4 - 2x$

(7) إذا كانت $p = \sqrt{at + b}$، $a = 920$، $b = (151.3)^2$، يعطى تقريبا لعدد السكان بالمليون في الولايات المتحدة أثناء الفترة 1990 – 1950، يناظر العام 1950. أوجد المعدل اللحظي لتغير p بالنسبة للزمن t.

أ) عند أي قيمة t. ب) عام 1989 $(t = 39)$

اثبت أن متوسط معدل التغير السنوي خلال هذه الفترة هو 2.32 مليون كل عام.

في التمارين من (8) إلى (11) أوجد ميل ومعادلة المماس للدالة f عند النقطة المعطاة وارسم $gr(f)$ موضحاً عليه المماس عند p

(8) $f(x) = \sqrt{x} \quad , p(4,2)$ (9) $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad , p(-8,-2)$

(10) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad , p\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ (11) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad , p\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$

(12) أوجد نقطة المنحنى $y = x^3$ الذي يكون الميل عندها $m = 27$.

في التمارين (13) إلى (16) معلوم موضع نقطة متحركة كدالة في الزمن $s(t)$ حيث t بالثواني، s بالمتر. أوجد في كل تمرين،

أ) السرعة المتوسطة في الفترات $[1,1.2]$، $[1,1.1]$، $[1,1.01]$

ب) السرعة عندما $t=1$.

(13) $s(t)=4t^2+3t$ (14) $s(t)=2t-3t^2$

(15) $s(t)=\sqrt{2-t}$ (16) $s(t)=t+\sqrt{t}$

(17) طائرة إنقاذ تسقط أقفاص منتجات غذائية من ارتفاع $160\ m$. ويصبح ارتفاع القفص عن سطح الأرض عند t ثانية هو $160-16t$. أوجد سرعة القفص عند $t=1$ وأوجد سرعة ارتطام القفص بالأرض.

في التمرينين (18)، (19) أوجد :

أ) متوسط معدل تغير y بالنسبة إلى x في الفترة المعطاة.

ب) المعدل اللحظي لتغير y بالنسبة للزمن t عند الحد الأيسر للفترة.

(18) $y=x^2+2\ ,\ [3,3.5]$ (19) $y=3-2x^2\ ,\ [2,2.4]$

(20) أدت النظرية النسبية إلى حقيقة هامة وهي المسافة L_0 بين نقطتين تنكمش إلى L، $L=L_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$، إذا كان النقطتان داخل مركبة تجرى بسرعة υ، c هي سرعة الضوء $\left(3\times10^8\ m/s\right)$، أوجد المعدل اللحظي لتغير طول جسم L بالنسبة للسرعة υ.

أ) عند أيْ υ ب) عندما $\upsilon=0.9c$

(21) استعمل تقريب متوسط معدل تغير y بالنسبة إلى x لإيجاد المعدل اللحظي لتغير y بالنسبة إلى x، عند $x=a$، مستخدما مرة، مرة أخرى.

أ) $y=\dfrac{10\cos x}{x^2+4}$ ، $a=-1/2$

ب) $y=\dfrac{\cos^2 x+x^2\sin x}{x^2+1}$ ، $a=2$

بند 2-3 تعريف المشتقة Definition of Derivative

تعاملنا في البند السابق مع معدل التغير أو السرعة أو ميل المماس معا نهايات على الشكل،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

أ، ما يعادلها

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

وهذه النهاية هي حجر الأساس للمبادئ الأساسية للحسبان، وهي المشتقة. نقابلنا المشتقة خلال دراستنا للحسبان في المسائل التي تتعرض لمعدلات التغير ومن ثم فلها تطبيقات في معظم فروع العلوم التطبيقية. ونحن نقدم في هذا البند بتعريف مشابه لهذه النهايات للمشتقة ونعطى بعض القواعد البسيطة التي تمكننا من إيجاد المشتقات بدون حساب النهايات مع بعض الخواص للمشتقة وترميزاتها.

تعريف المشتقة

" مشتقة الدالة f هي الدالة f' تعطى بالمعادلة

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

بشرط وجود هذه النهاية "

فإذا ما حصلنا على $f'(x)$ نستطيع إيجاد $f'(a)$ عند أيْ نقطة $x=a$ في نطاق الدالة f.

قابلية التفاضل: ذكرنا في تعريف المشتقة أن النهاية لابد أن تكون موجودة لكي تكون $f'(x)$ موجودة عندئذ يقال أن f قابلة للتفاضل عند x. أما إذا كانت النهاية غير موجودة فإن f تكون غير قابلة للتفاضل عند x. وعندما

نقول فاضل f أو أوجد مشتقة f نعنى اوجد $f'(x)$. وبالمناسبة نجد أنه يجب أن نعرف الشكل الآخر لتعريف $f'(a)$ وهو

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ومن ثم نجد أن من تطبيقات المشتقة التي نحن الآن على علم بها:

1) المستقيم المماس: ميل المماس للمنحنى $gr(f)$ عند نقطة $(a,f(a))$ هو $f'(a)$.

2) معدل التغير : إذا $y=f(x)$، لأن معدل تغير y بالنسبة إلى x عند $x=a$ هو $f'(a)$.

وحالة خاصة تكون سرعة نقطة p عند زمن $t=a$.

هي $s'(a)$، حيث $s(t)$ هو موضع النقطة عند زمن t.

مثال (1):

إذا كان $f(x)=3x^2-12x+1$ فأوجد :

أ) $f'(x)$ ب) $f'(4)$ جـ) $f'(-2)$ د) $f'(a)$

الحــل:

أ) باستعمال التعريف

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3\left[(x+h)^2-x^2\right]-12[(x+h)-x]+(1-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h(2x+h)-12h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\ 3(2x+h)-12$$

$$=6x-12$$

ب) بالتعويض عن $x = 4$ في $f'(x) = 6x - 12$

$$f'(4) = 6(4) - 12 = 12$$

جـ) بالمثل $f'(-2) = 6(-2) - 12 = -24$

د) $f'(a) = 6a - 12$

مثال (2):

أوجد مشتقة الدالة $f(x)$ من المبادئ الأولية :

أ- $f(x) = x^2$

ب- $f(x) = \dfrac{1}{x}$

جـ- $f(x) = \sqrt{1 + x}$

الحـــل:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

أ- $f(x) = x^2$ ، $f(x+h) = (x+h)^2$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2$$

$$= x^2 - 2xh + h^2 - x^2$$

$$= 2xh + h^2$$

$$= h\ (2x + h)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\ 2x + h = 2x$$

إذن

$$f'(x) = 2x$$

ب- $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $f(x+h)=\dfrac{1}{x+h}$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{x-(x-h)}{x(x+h)}=\frac{x-x-h}{x(x+h)}$$

$$=\frac{-h}{x(x+h)}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-1}{x(x+h)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\ \frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

إذن $f'(x)=\dfrac{-1}{x}$

جـ- $f(x)=\sqrt{1+x}$ ، $f(x+h)=\sqrt{1+x+h}$

$$f(x+h)-f(x)=\sqrt{1+x+h}-\sqrt{1+x}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{1+x+h}-\sqrt{1+x}}{h}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x+h}-\sqrt{1+x}\right)}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\frac{(1+x+h)-(1+x)}{h\left[\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\right]}$$

$$=\frac{h}{h\left[\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\right]}=\frac{1}{\left[\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\ \frac{1}{\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}}$$

إذن $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

مثال(3): أوجد مشتقة الدالة $f(x)$ عندما $x=1$ ،

$$f(x)\begin{cases} x^2 & , \quad x<1 \\ 2x-1 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

الحــل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(x)}{h}$$

عند $x=1$ نجد أن

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x-1)=1$$

$$f(1)=1$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=1$.

كذلك،

<u>**أولاً:**</u>

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[2(1+h)-1]-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2 _ 2h-1-1}{h}=2$$

<u>**ثانيا:**</u>

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+2h-h^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} (2+h) = 2$$

من أولاً وثانياً، نجد أن كلا النهايتين من اليمين ومن اليسار متساويتان، أي أن النهاية، موجودة،

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$$

إذن $$f'(1) = 2$$

مثال (4):

اثبت أن مشتقة الدالة $f(x)$ موجودة عند $x=2$ وأوجدها بينما غير موجودة $x=3$ أيْ أن $f(x)$ قابلة للتفاضل عند $x=2$ وغير قابلة للتفاضل عند $x=3$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2 & , \ x < 2 \\ [x] & , \ 2 \le x < 3 \\ 2x - 4 & , \ x \ge 3 \end{cases}$$

الحـــل:

أولاً : عند $x=2$

$$\lim_{h \to 2^-} f(x) = \lim_{h \to 2} \left(-x^2 + 4x - 2\right) = 2$$

$$\lim_{h \to 2^+} f(x) = \lim_{h \to 2^+} [x] = 2$$

$$f(2) = [2] = 2$$

إذن الدالة مستمرة عند $x=2$.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

نبحث وجود النهاية،

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[2+h]-[2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2-2}{h}$$

$$=0$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(2+h)^2+4(2+h)-2-[2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-4-4h+h^2+8+4h-2-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-} h=0$$

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار، أيْ أن النهاية موجودة وتساوي 0، الدالة قابلة للتفاضل و،

$$f'(2)=0$$

ثانياً : عند $x=3$

$$\lim_{h\to 3^-} f(x)=\lim_{h\to 3^-}[x]=2$$

$$\lim_{h\to 3^+} f(x)=\lim_{h\to 3^+}(2x-4)=2$$

$$f(3)=2(3)-4=2$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=3$

ثم نبحث وجود النهاية

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

نجد أن،

$$\lim_{h \to \bar{0}} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to \bar{0}} \frac{[3+h] - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to \bar{0}} \frac{2-2}{h}$$

$$= 0$$

و

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(3+h) - 4 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{6 + 2h - 6}{h}$$

$$= 2$$

أيْ أن النهاية من اليسار =0 والنهاية من اليمين = 2 إذن النهاية غير موجودة، ومن ثم $f'(3)$ غير موجودة والدالة غير قابلة للتفاضل عند $x = 3$.

مما سبق نبحث أن $f(x)$ هي دالة مستمرة على R وقابلة للتفاضل ماعدا عند $x = 3$.

القواعد الأساسية للتفاضل

عملية إيجاد المشتقة قد تصبح بالغة الصعوبة إذا ما استعملنا التعريف في حالة الدوال التركيبية المعقدة، ولكن نحمد الـلـه أنه أمكن إنشاء معادلات عامة وقواعد تمكننا من إيجاد $f'(x)$ بدون استعمال النهايات. وفيما يلي نتدرج في ذكر هذه القواعد والمبرهنات.

1) **مشتقة الدالة الخطية**

إذا $f(x) = ax + b$

فإن $f'(x) = a$

البرهان

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[a(x+h)+b]-[ax+b]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

2) **مشتقة المقدار الثابت**

إذا $f(x) = b$

$f'(x) = 0$

البرهان

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{b-b}{h} = 0$$

3) **قاعدة القوة:**

أ) إذا كانت n عدد صحيح، $f(x) = x^n$

فإن $f'(x) = nx^{n-1}$

شريطة أن $x \neq o$ عندما $n \leq o$

البرهان

إذا كان n عدد صحيح موجب من السهل إثبات أن

$$(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+.....+a^{n-1}\right)=x^n-a^n$$

أيْ أن

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+......+a^{n-1}$$

وباستعمال التعريف

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},\ f(x)=x^n$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{t^n-x^n}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\left(t^{n-1}+xt^{n-2}+.......+x^{n-1}\right)$$

$$=x^{n-1}+x^{n-1}+.....+x^{n-1}$$

$$=nx^{n-1}$$

وإذا كان n عدد صحيح سالب فإن، بوضع $n=-k$، k موجب، $x\neq 0$ يكون

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{t^{-k}-x^{-k}}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{\frac{1}{t^k}-\frac{1}{x^k}}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{x^k-t^k}{t^kx^k(t-x)}$$

$$=\lim_{t\to x}\ \frac{-1}{t^kx^k}.\frac{t^k-x^k}{t-x}$$

$$= \frac{-1}{x^k x^k} .kx^{k-1}$$
$$= (-k)x^{-k-1}$$
$$= nx^{n-1}$$

وعندما $n = 0$ تظل قاعدة القوة صحيحة لأن

$$(x \neq 0) f'(x) = 0x^{-1} = 0 \ \text{،} \ f(x) = x^0 1$$

إذا مشتقة x^n هي nx^{n-1} لجميع الأعداد الصحيحة.

ب) إذا كان الأس هو $\frac{1}{n}$، n عدد صحيح موجب فإن لأجل، $f(x) = x^{1/n}$ يكون

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

البرهان

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h}$$

$$(u-v)\left(u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2} + v^{n-1}\right) = u^n - v^n$$

إذا $u \neq v$ فإن،

$$\frac{u-v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots. + uv^{n-2} + v^{n-1}}$$

بتعويض $u = (x+h)^{1/n}$ ، $v = x^{1/n}$

$$\frac{(x+h)^{1/n} - x^{1/n}}{\cancel{x} + h - \cancel{x}} = \frac{1}{(x+h)^{\frac{n-1}{n}} + (x+h)^{\frac{n-2}{n}} x^{\frac{1}{n}} + \ldots. + x^{\frac{n-1}{n}}}$$

وبجعل $h \to o$ ينتج أن

$$f'(x)=\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-1}{n}}+....+x^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}x^{\frac{-n+1}{n}}$$

إذا $$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

جـ- إذا كان الأس على صورة $\frac{m}{n}$ ، $n \neq 0$

إذاً $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ ، $f'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

البرهان نستعمل نفس المتطابقة المستخدمة في (أ)، (ب)

بوضع ، $u=(x+h)^{\frac{m}{n}}$ ، $\upsilon=x^{\frac{m}{n}}$

$$\frac{(x+h)^{\frac{m}{n}}-x^{\frac{m}{n}}}{(x+h)^m-x^m}=\frac{1}{(x+h)^{\frac{m}{n}(n-1)}+(x+h)^{\frac{m}{n}(n-2)}x^{\frac{m}{n}}+...+(x+h)^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{m}{n}}-x^{\frac{m}{n}}}{(x+h)^m-x^m}=\frac{1}{(x+h)^{\frac{m}{n}(n-1)}+(x+h)^{\frac{m}{n}(n-2)}x^{\frac{m}{n}}+...+(x+h)^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

$$=\frac{1}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

إذن

$$\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(x+h)^{\frac{m}{n}}-x^{\frac{m}{n}}}{h}}{\dfrac{(x+h)^{m}-x^{m}}{h}}=\frac{1}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(x+h)^{\frac{m}{n}}-x^{\frac{m}{n}}}{h}}{mx^{m-1}}=\frac{1}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

إذن

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{m}{n}}-x^{\frac{m}{n}}}{h}=\frac{m\ \ x^{m-1}}{n\ \ x^{m-\frac{m}{n}}}$$

$$=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$f'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

مما سبق نجد أن مبرهنة القوة صحيحة لجميع القوى الحقيقية صحيحة أو قياسية. وسوف نثبت فيما بعد صحتها لقيم القوة غير القياسية. ويصبح على وجه العموم،

إذا $\alpha \in R$ ، $f(x)=x^{\alpha}$ فإن

$$f'(x)=\alpha\ \ x^{\alpha-1}$$

ومن ثم انظر الجدول التوضيحي،

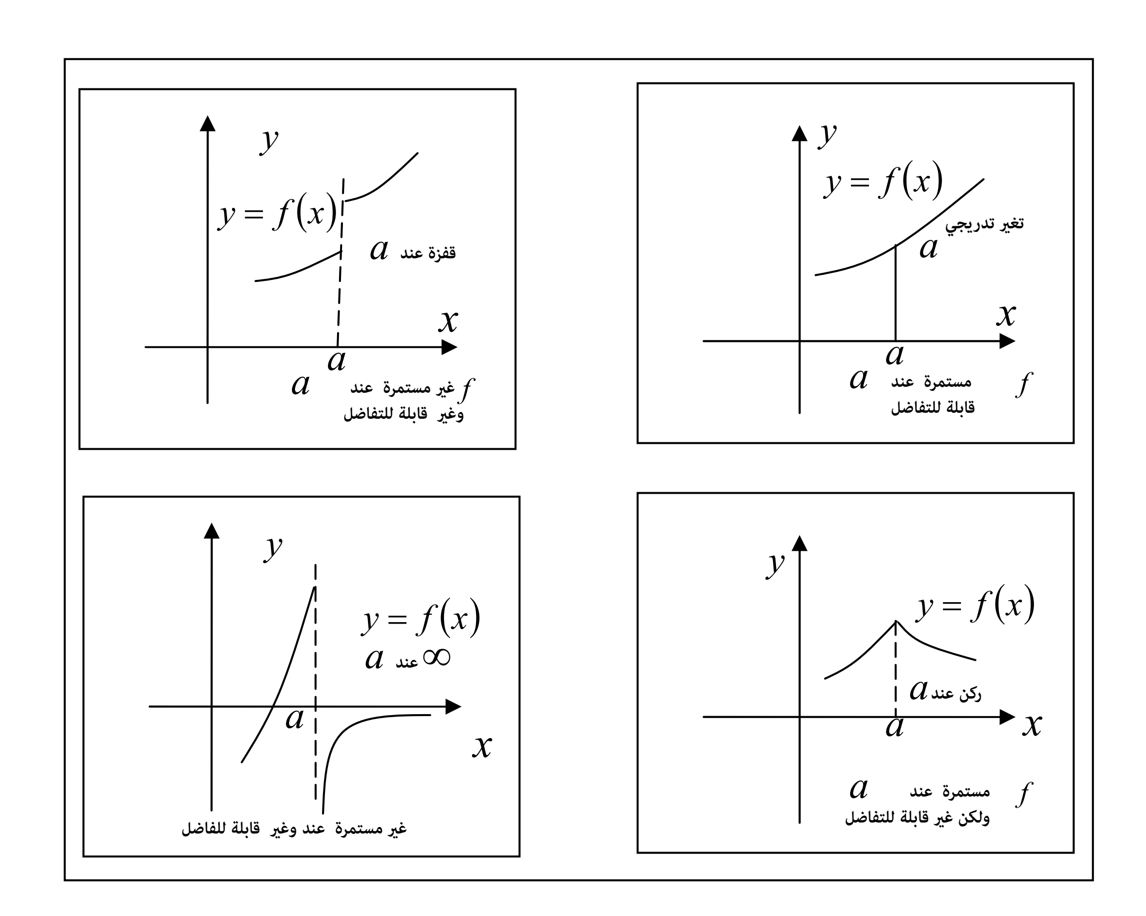
$f'(x)$	$f(x)$
$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} = x^{1/2}$
$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$	$\sqrt[3]{x} = x^{2/3}$
$6x^5$	x^6
0	7
$-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$
$-x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$

3- الاستمرارية وقابلية التفاضل

سنبين هنا أنه ليس كل دالة f قابلة للتفاضل عند كل قيمة لـ x في نطاقها وأنه إذا كانت f غير مستمرة عند a فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند a. زد على ذلك أن كثير من الدوال المستمرة غير قابلة للتفاضل. ولبحث قابلية التفاضل علينا أن نبحث وجود أو عدم وجود النهاية،

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

من عدمه. ومن الناحية الهندسية نستطيع القول أن الدالة f مستمرة عند نقطة على بيانها إن لم يكن هناك أي قفزة أو كسر عند هذه النقطة. أما إذا كانت بالإضافة إلى ذلك نفاضل فإن بيان f يمر خلال النقطة بطريقة تدريجية ناعمة بدون أركان أو مماسات رأسية. شكل (75) يوضح بعض بيانات دوال في الحالات مختلفة.



شكل (75)

على الرغم أن ليس كل دالة مستمرة تكون قابلة للتفاضل إلا أنه على العكس كل دالة قابلة للتفاضل تكون مستمرة.

مبرهنة:

" إذا كانت f قابلة للتفاضل عند a، فإنها تكون مستمرة عند a "

البرهان، لنفرض f قابلة للتفاضل، فإن

موجودة $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x\to a}$$

ولكن $$\frac{f(x)-f(a)}{x\to a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f(x)-f(a)=\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)(x-a)$$

$$f(x)=f(a)+\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)(x-a)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f(a)+\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$$

$$=f(a)+f'(a)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$$

بما أن $f'(a)$ موجودة،

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)+f'(a)\cdot 0$$

$$=f(a)$$

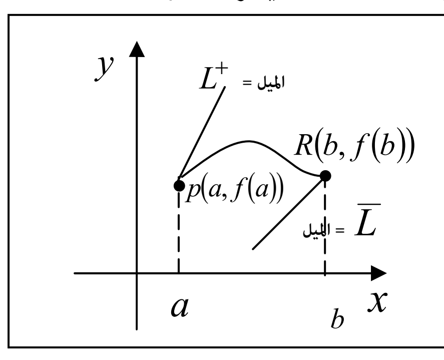
$\therefore$ مستمرة عند a انتهى البرهان.

تعريف (قابلية التفاضل على فترة)

" يقال للدالة f أنها قابلة للتفاضل على فترة مغلقة $[a,b]$ إذا كانت f قابلة للتفاضل على الفترة المفتوحة (a,b) وكانت النهايتان، L^+ ، $\overline{L}$ موجودتان، حيث

$$L^+=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(x)}{h}, L^-=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$ "

تسمى L^+ المشتقة اليمنى، L^- المشتقة اليسرى انظر شكل (76)



شكل (76)

تعريف (الناب Cusp)

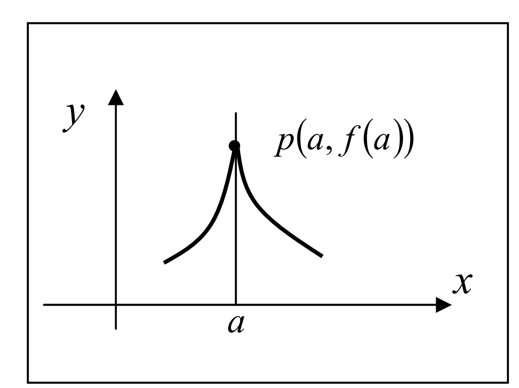
" يقال أن $gr(f)$ له " ناب " عند $x = a$ إذا كان f مستمرة عند a مستمرة وتحقق الشرطين:

$$-1 \quad f'(x) \to \infty \quad \text{عندما} \quad x \to \bar{a}$$

$$-2 \quad f'(x) \to -\infty \quad \text{عندما} \quad x \to a^{+}$$

أو العكس $-\infty$ لما $x \to \bar{a}$، $+\infty$ لما $x \to a^{+}$ "

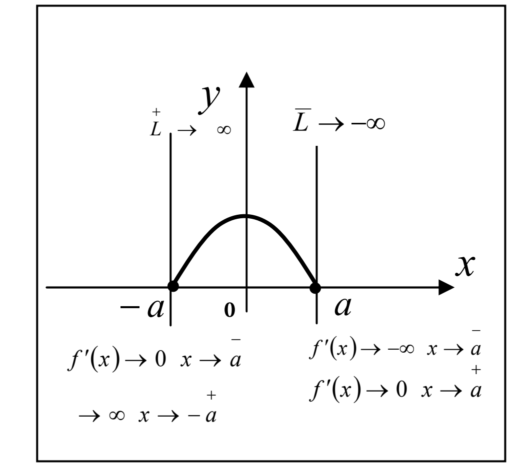
كالمثال الموضح في شكل (77)

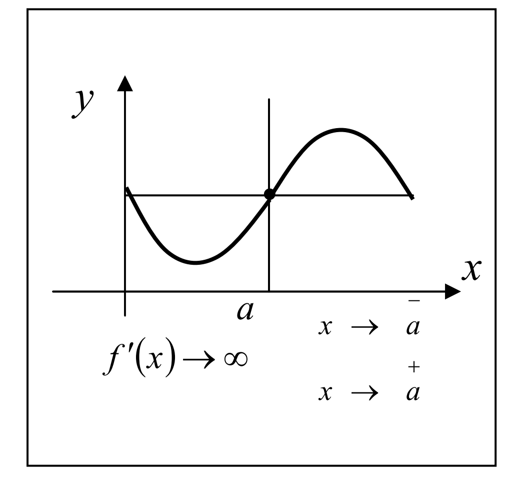


لاحظ أنه إذا كان $f'(x) \to +\infty$ عندما $x \to a^{-}$، $x \to a^{+}$ لن يكون هناك ناب وإنما فقط مماس رأسي.

وبالمثل لو أن $f'(x) \to -\infty$ من الجانبين كما في الشكلي (78)

شكل (77)





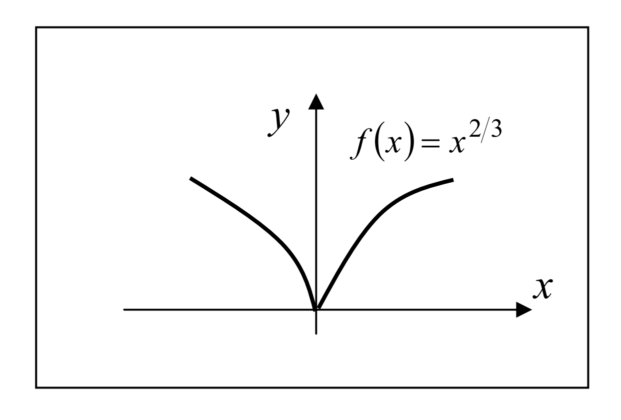
شكل (78)

إذا اتخذنا الدالة $f(x) = x^{2/3}$ ، نجد أن $f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}}$ أيْ
$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ،

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

$\therefore$ الدالة لها ناب عند $x = 0$ (لاحظ أنها مستمرة عند $x = 0$ ، $y = 0$ كما في شكل (79)



شكل (79)

<u>ترميز المشتقة</u>

إذا كان $y = f(x)$ فإن المشتقة الأولى يرمز لها بأحد الرموز الآتية،

$$f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx} f(x), D_x y, D_x f(x)$$

يسمى كل من D_x ، $\frac{d}{dx}$ مؤثر تفاضلي وكل من $D_x y$ أو $\frac{dy}{dx}$ مشتقة y بالنسبة إلى x أو تفاضل y بالنسبة إلى x.

إذا كان المراد حساب المشتقة عند $x = a$ مثلا، قد نكتب

$$f'(a) \quad .i \qquad D_x y\Big|_{x=a} \quad .ii \qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} \quad .iii \qquad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} \quad .iv$$

فمثلا

$$D_x\left(x^2\right) = 2x$$

$$\frac{d}{d_x}\left(x^{5/3}\right) = 5/3\, x^{2/3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(2t^{-4}\right) = 8t^{-5} = -\frac{8}{t^5}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\vartheta^3\right)\Big|_{\vartheta=2} = 3\vartheta^2\Big|_{\vartheta=2} = 12$$

$$\left[\frac{d}{dx},\left(x^3\right)\right]_{x=1} = \left[3x^2\right]_{x=1} = 3$$

$$\left[\frac{d}{du}\left(9u^{4/3}\right)\right]_{u=8} = \left[12u^{1/3}\right]_{u=8} = 12\left(8^{1/3}\right) = 24$$

قد نحتاج إلى إيجاد مشتقة المشتقة، فنسميها المشتقة الثانية أو التفاضل الثاني للدالة f ويرمز لها بالرمز f'' ،

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]' = \frac{d}{dx} f'(x)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

$$f''(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2} f(x) \equiv D^2{}_x y$$

وبالمثل نستطيع الترميز للمشتقة الآتية (رقم n، n عدد صحيح موجب)

بالرموز الآتية $$f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n}{dx^n} f(x) \equiv D_x{}^n f \equiv D_x{}^n y$$

حيث n رتبة المشتقة $f^{(n)}(x)$ وكلما كانت $n > 1$ سميت المشتقات بالمشتقات العليا.
فمثلا إذا كان

$$f(x) = 2x^{7/3}$$

فإن

$$f'(x) = \frac{14}{3} x^{4/3}$$

$$f''(x) = \frac{56}{9} x^{1/3}$$

$$f'''(x) = \frac{56}{27} x^{-2/3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{112}{81} x^{-5/3}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{560}{243} x^{-8/3}$$

وهكذا.....

4- أساليب التفاضل

نورد في هذا الجزء بعض القواعد العامة التي تساهم في تبسيط عملية الاشتقاق.
إذا كان f ، g دالتين قابلتين للاشتقاق، كل من a ،b ،c ، ثوابت حقيقية، n عدد قياسي فإن:

مبرهنة (1)

أ- $$\frac{d}{dx}\left(a \ f(x)\right) = a \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$

ب- $$\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(f(x)\right) + \frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))-\frac{d}{dx}(g(x))$$ -جـ

البرهان

أ-

$$\frac{d}{dx}(a\ \ f(x))=\lim_{h\to 0}\frac{a\ \ f(x+h)-a\ \ f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c\frac{d}{dx}(f(x))$$

انتهى برهان (أ)

ب-

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx}(g(x))$$

انتهى برهان (ب)

جـ- يتم البرهان تماماً كما في (ب).

فمثلاً

$$\frac{d}{dx}(2x^4)=2\frac{d}{dx}x^4=2(4x^3)=8x^3$$

$$\frac{d}{dx}(5x^5) = 5(3x^2) = 15x^2$$ ،

$$\frac{d}{dx}(2x^4 + 5x^3) = 8x^3 + 15x^2$$ ،

$$\frac{d}{dx}(2x^4 - 5x^3) = 8x^3 - 15x^2$$ ،

مثال (5): أوجد

$$\frac{d}{dx}\left(2x^4 - 5x^3 + x^2 + \sqrt{x} - 3x + 33\right)$$

الحــل:

$$\frac{d}{dx}\left(2x^4 - 5x^3 + x^2 + \sqrt{x} - 3x + 33\right)$$
$$= 8x^3 - 15x^2 + 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3$$

مثال (6):

أوجد معادلة المماس لبيان الدالة

$$y = 2\ \sqrt[3]{x^2} - 3/\sqrt{x}$$

عند النقطة $(x = 1)$

الحــل:

$$y = 2x^{2/3} - 3x^{-1/2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^{-1/3} + \frac{3}{2}x^{-3/2}$$

ميل المماس عند النقطة $x = 1$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{17}{6}$$

،

$$\left.y\right|_{x=1}=2\sqrt[3]{1}-\frac{3}{\sqrt{1}}$$

$$=2-3=-1$$

معادلة المماس،

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-(-1)=\frac{17}{6}(x-1)$$

$$6y+6=17x-17$$

$$17x-6y-23=0$$

مبرهنة (2): (قاعدة حاصل ضرب دالتين)

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\frac{d\ f(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{d\ g(x)}{dx}$$

أيْ تفاضل حاصل الضرب = الأول × تفاضل الثاني + الثاني × تفاضل الأول.

البرهان: لنعتبر $y=f(x)\ g(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\ g(x+h)-f(x)\ g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\ g(x+h)-f(x+h)\ g(x)+f(x+h)\ g(x)-f(x)\ g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\ f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(f(x))$$

انتهى البرهان.

ويمكن الصياغة على النحو،

$$(y_1 y_2)' = y_1 y_2' + y_1' y_2$$

مثال (6):

إذا كانت $y = (x^3 - 4x^2)\,(x^5 + x^2 - 11x + 7)$ أوجد dy/dx .

الحـل:

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 - 4x^2)\,(5x^4 + 2x - 11) + (3x^2 - 8x)\,(x^3 + x^2 - 11x + 7)$$

$$= (5x^7 + 2x^4 - 11x^3 - 20x^6 - 8x^3 + 44x^2)$$

$$+ (3x^5 + 3x^4 - 33x^3 + 21x^2$$

$$- 8x^4 - 8x^3 + 88x^2 - 56x)$$

$$= 5x^7 - 20x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 52x^3 + 153x^2 - 56x$$

مثال (7):

أوجد نقط بيان المعادلة $y = x^{1/3}(x^2 - 3x + 2)$ التي يكون عندها المماس أفقياً أو رأسياً.

الحـل:

$$\frac{dy}{dx} = x^{1/3}(2x - 3) + \frac{1}{3}x^{-2/3}(x^2 - 3x + 2)$$

$$= x^{1/3}(2x-3)+\frac{x^2-3x+2}{3x^{2/3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x(2x-3)+x^2-3x+2}{3x^{2/3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{7x^2-12x+2}{3x^{2/3}}$$

يكون المماس أفقياً، لما $\frac{dy}{dx}=0$

$$7x^2-12x+2=0$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{22}}{7}$$

ويكون المماس رأسياً، لما $\frac{dy}{dx}\to\pm\infty$ أي عندما المقام يساوي 0

$$x=0$$

ولما كان عند $x=0$، f مستمرة، إذن يوجد مماس رأسي عند $(0,0)$

مبرهنة 3: (قاعدة خارج القسمة)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

ونتذكرها، مشتقة خارج القسمة هي المقام × تفاضل البسط ناقص البسط في تفاضل المقام مقسوماً على مربع المقام.

البرهان

إذا كان، $y=f(x)/g(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h\ \ g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-g(x)f(x)+g(x)f(x)-f(x)g(x+h)}{h\ \ g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h\ \ g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)\ \ g(x)}$$

$$=\frac{g(x)\ \ f'(x)-f(x)\ \ g'(x)}{(g(x))^2}$$

انتهى البرهان.

<u>نتيجة:</u>

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

فمثلاً

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\quad ,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)=-\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

مثال (7):

أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، أ - $y=\frac{3x^4-3x^3+1}{2x^2+3}$ ب- $y=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$

الحــل:

أ-
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x^2+3)(12x^3-9x^2)-(3x^4-3x^3+1)(4x)}{(2x^2+3)^2}$$
$$=\frac{24x^5-18x^4+36x^3-27x^2-12x^5+12x^4-4x}{(2x^2+3)^2}$$
$$=\frac{12x^5-6x^4+36x^3-27x^2-4x}{(2x^2+3)^2}$$

ب-
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2}\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$=\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

مثال (8):

أوجد معادلة المماس عند $x=1$ ، $x=2$ لبيان العلاقة، $y=\frac{2x}{x-2}$.

الحــل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-2)(2)-2x(1)}{(x-2)^2}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4}{(x-2)^2}$$

عند $x=1$
$$y=\frac{2(1)}{1-2}$$
$$y=-2$$

، ميل المماس
$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{-4}{(1-2)^2}=-4$$

معادلة المماس هي

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y+2=-4(x-1)$$
$$y+2=-4x+4$$
$$4x+y-2=0$$

عند $x=2$

$$y=\frac{2(2)}{2-2}\to\pm\infty$$

الدالة غير مستمرة عند $x=2$ وبالطبع لا يوجد مماس. لأنها غير قابلة للتفاضل أصلاً.

<u>مبرهنة (4)</u> (قاعدة السلسلة)

" إذا كان $y=f(u)$ ، $u=g(x)$ وكلا من $\frac{dy}{du}$ ، $\frac{du}{dx}$ موجودان فإن تفاضل الدالة التركيبية $y=f(g(x))$ هو $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)g'(x)$ "

البرهان

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

لكن،

عندما $h\to0$ ، $g(x+h)\to g(x)$

بجعل $g(x)=a$ ، $g(x+h)=t$ أيْ $t\to u$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{t \to u} \frac{f(t) - f(u)}{t - u} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(u) g'(x)$$

انتهى البرهان.

مثال (9):

أوجد $\frac{du}{dx}$ إذا كان $y = u^{3/2}$ ، $u = x^2 - 2x$

الحـــل:

$\frac{du}{dx} = 2x - 2$ و $\frac{du}{dx} = \frac{3}{2} u^{1/2}$

إذن،

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{3}{2} u^{1/2} (2x - 2)$$
$$= 3(x^2 - 2x)^{1/2} (x - 1)$$

أيْ أن

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 2x)^{3/2} = \frac{3}{2} (x^2 - 2x)^{1/2} (2x - 2)$$
$$= 3(x^2 - 2x)^{1/2} (x - 1)$$

وعموماً

إذا كان $y = u^n$ ، $u = g(x)$

فإن

$$\frac{dy}{dx} = n\ u^{n-1} \cdot g'(x)$$

أو نكتب،

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

مثال (10):

أوجد $\frac{dy}{dx}$. أ) $y = \left(x^3 - 4x^2 + 6\right)^5$ ب- $y = \sqrt{x^2 + 2x - 7}$

الحـــل:

أ) $$\frac{dy}{dx} = 5\left(x^3 - 4x^2 + 6\right)^4\left(3x^2 - 8x\right)$$

ب) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x - 7\right)^{-1/2}(2x + 2)$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 7}}$$

مثال (11):

أوجد $f'(x)$ عندما $f(x) = (ax+b)^5(cx+d)^6$
ثوابت حقيقية a, b, c, d .

الحـــل:

$$f'(x) = (ax+b)^5 \frac{d}{dx}(cx+d)^6 + (cx+d)^6 \frac{d}{dx}(ax+b)^5$$

$$= (ax+b)^5 6(cx+d)^5(c) + (cx+d)^6 5(ax+b)^4(a)$$

$$= (ax+b)^4(cx+d)^5[6c(ax+b) + 5a(cx+d)]$$

$$= (ax+b)^4(cx+d)^5[(6ca+d)x + 6cb + 5ad]$$

$$= (ax+b)^4(cx+d)^5(11cax + 6cb + 5ad)$$

$f'(x)$ قد تسمى أيضاً المعامل التفاضلي. ومن المستحب أن يتذكر الطالب

تفاضل x^n في الحالات الخاصة $n^{1/2}$ ، $n=-1$، $n=0$ على النحو،

أ) تفاضل جذر $x = \dfrac{1}{\text{ضعف} \quad \text{الجذر}}$

$$\left(\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

ب) تفاضل واحد على $x =$ ناقص واحد على x تربيع

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}\right)$$

جـ) تفاضل المقدار الثابت = 0

$$\left(\frac{d}{dx}(c) = 0\right)$$

وبإدخال قاعدة السلسلة نجد أن،

1) تفاضل الجذر = واحد على ضعف الجذر × تفاضل ما تحت الجذر

$$\left(\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{-1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx}\right)$$

2) تفاضل واحد على دالة = ناقص واحد على مربع الدالة × تفاضل الدالة

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right) = \frac{-1}{[g(x)]^2}\, g'(x)$$

مثال (12)

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ ، ومعادلة المماس لما $x = 0$

$$y = \sqrt{\left(x^2+1\right)^3 + \frac{1}{x^2+1}}$$

الحــل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)^3+\frac{1}{x^2+1}}}\cdot\left[3\left(x^2+1\right)^2(2x)-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}(2x)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)^3+\frac{1}{x^2+1}}}\cdot 2x\left(3\left(x^2+1\right)^2-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^4+1}}\left(\frac{3\left(x^2+1\right)^4-1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)$$

$$=\frac{x\left[3\left(x^2+1\right)^4-1\right]}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^4}\ \left(x^2+1\right)^{3/2}}$$

عندما $x=0$

$$y=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
$$y'=0$$
$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$
$$y-\sqrt{2}=0$$

معادلة المماس $y=\sqrt{2}$ وهو مستقيم يوازى المحور x.

بند 3.3: التفاضل الضمني والتفاضل البارامتري:

1: التفاضل الضمني: implicit differentiation

إذا كان $y = f(x)$ فإن y تسمي دالة صريحة في x وكذلك المعادلة $f(x)=0$ - y تعين نفس الدالة f.

فإذا كتبنا $y = 3x^2 - 5/x$ نقول y دالة صريحة في x

المعادلة $xy - 3x^3 + 5 = 0$ تعين نفس الدالة $f(x) = 3x^2 - 5/x$

لأننا لو عوضنا $y = f(x)$ ، نحصل على:

$$x\left(3x^2 - 5/x\right) - 3x^2 + 5 = 0$$

$$3x^3 - 5 - 3x^2 + 5 = 0$$

$$0 = 0$$

وهي متطابقة لأنها صحيحة مهما كانت x

ولكن في المعادلة $xy - 3x^3 + 5 = 0$ ، نقول أن y تتعين ضمنا من هذه المعادلة. أو أن y هي دالة ضمنية وبالطبع ليس في جميع الأحوال يمكن تحويل الدالة المعرفة ضمنيا إلى دالة صريحة، فمثلا، المعادلة:

$$y^2 - 2yx + \sqrt{x^2 + y^2} = 2x$$

تتضمن دالة ضمنية y ولكن يصعب إيجاد y كدالة صريحة في x، وهدفنا في هذا الجزء من البند 3.4 هو إيجاد مشتقة الدالة الضمنية دون الحاجة إلى تحويلها لدالة صريحة وأحيانا ما تتضمن المعادلة أكثر من دالة ضمنية فمثلا المعادلة:

$$y^2 + x^2 = 16$$

يمكن تحويلها إلى دالتين صريحتين هما:

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

أي: $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ ، $g(x) = -\sqrt{16 - x^2}$

ولإيجاد تفاضل دالة f معرفة ضمنيا، نستعمل طريقة تسمى التفاضل الضمني، وفيها نفاضل كل حد من حدود المعادلة بالنسبة للمتغير المستقل (x) ثم نوجد $\frac{dy}{dx}$

من الناتج مع ملاحظة أن:

$$\frac{d}{dx}g(y)=\frac{dg(y)}{dy}.y'$$

مثال (13):

إذا كان: $x^4+y^4-3y^2+5x^2=2y-x$

تعرف دالة f ضمنيا، و f قابلة للتفاضل أوجد $f'(x)$

الحــل:

فاضل مباشرة بالنسبة إلى x

$$4x^3+4y^3y'-6yy'+10x=2y'-1$$

أنقل جميع الحدود التي تحتوى y' إلى الطرف الأيسر وباقي الحدود إلى الطرف الأيمن:

$$3y^3y'-6yy'-2y'=-1-10x-4x^3$$

خذ y' عاملا مشتركا ,

$$y'(3y^2-6y-2)=-(1+10x+4x^3)$$

أوجد y' ،

$$y'=\frac{-(1+10x+4x^3)}{3y^2-6y-2},\ y\neq 1\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$$

أو

$$f'(x)=\frac{-(1+10x+4x^3)}{3(f(x))^2-6f(x)-2}$$

مثال14:

اوجد معادلة المماس لبيان المعادلة:

$$y^4 + 3y - 4x^2 = 5x + 1$$

عند النقطة $x = 1$

الحــل:

فاضل بالنسبة إلى x،

$$3y^3 y' + 3y' - 8x = 5$$

$$y'\left(4y^3 + 3\right) = 8x$$

$$y' = \frac{8x}{4y^3 + 3}, 4y^3 + 3 \neq 0 \quad \text{أو} \quad y \neq -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

<u>عند $x = 1$</u>

$$y^2 + 3y - 4 = 5 + 1$$

$$y^2 + 3y - 10 = 0$$

$$(y-2)(y+5) = 0$$

$$y = 2 \text{، } y = -5$$

إذاً يوجد نقطتان عندهما $x = 1$ ، هما:

$$P_2(1,-5) \text{ ،} P_1(1,2)$$

ميل المماس: عند P_1، P_2 على الترتيب

$$m_2 = \frac{8(1)}{4(-5)^3 + 3} \text{ ،} m_1 = \frac{8(1)}{4(2)^3 + 3}$$

$$m_2 = \frac{8}{-479} \text{ ،} m_1 = \frac{8}{35}$$

معادلتا المماسين عند P_1، P_2 هما إذن:

<u>عند P_1</u>

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y-2=\frac{8}{35}(x-1)$$
$$35y-70=8x-8$$
$$8x-35y+62=0$$

وعند P_2

$$y+5=\frac{-8}{497}(x-1)$$
$$497y+2395=-8x+8$$
$$8x+497y+2387$$

مثال(15):

أوجد النقط، الواقعة على بيان الدالة $y=f(x)$ والمعرفة ضمنيا بالمعادلة $x^2+y^2=25$، التي يكون عندها المماس موازي للمستقيم $3x+4y+5=0$.

الحــل:

نوجد ميل المماس بالتفاضل مباشرة بالنسبة لـ x

$$2x+2yy'=0$$
$$2yy'=-2x$$
$$y'=-\frac{x}{y}$$

وميل المستقيم: نوجده ولو بنفس الطريقة

$$3+4y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{3}{4}$$

المماس // المستقيم عندما يتساوى الميلان،

$$-\frac{x}{y}=-\frac{3}{4}$$

أي،

$$y=\frac{4x}{3}$$

بالتعويض في معادلة

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + \frac{16x^2}{9} = 25$$

$$\frac{25x^2}{9} = 25$$

$$x^2 = 9$$

إذن $x = 3$ ، $x = -3$

$y = 4$ ، $y = -4$

المماسان عند (3,4)، (4- , 3-) يوازيا المستقيم المعلوم

مثال (16):

إذا كان

$$x + y + \sqrt{y^2 - x^2} = 2$$

أوجد، $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ ومعادلة المماس عند $x = 0$

الحــل:

فاضل الطرفين بالنسبة إلى: x

$$1 + y' + \frac{2(yy' - x)}{2\sqrt{y^2 - x^2}} = 0$$

$$2\sqrt{y^2 - x} + 2y'\sqrt{y^2 - x^2} + 2yy' - 2x = 0$$

$$y'\left(\sqrt{y^2 - x^2} + y\right) = x - \sqrt{y^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{x - \sqrt{y^2 - x^2}}{y + \sqrt{y^2 - x^2}}$$

من معادلة المنحنى عندما $x = 0$ ،

$$0 + y + y = 2$$

$$y = 1$$

وميل المماس عند النقطة (0,1) هو

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = m(0) = y'(0,1) = \frac{0-\sqrt{1-0}}{1+\sqrt{1-0}}$$

$$m = \frac{-1}{2}$$

معادلة المماس هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

$$2y - 2 = -x$$

$$x + 2y - 2 = 0$$

مثال(17):

إذا كان $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ اوجد y''.

الحـــل:

$$4y^3 y' + 3y' - 12x^2 = 5$$

$$y'(4y^3 + 3) = 12x^2 + 5 \qquad (1)$$

$$y' = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3} \qquad (2)$$

بتفاضل (1) مرة أخرى نسبة إلى x ،

$$y'(12y^2)y' + y''(4y^3 + 3) = 24x$$

$$y''(4y^3 + 3) = 24x - 12y^2 y'^2$$

بالتعويض عن y' من (2)

$$y''(4y^3 + 3) = 24x - 12y^2 \frac{(12x^2 + 5)^2}{(4y^3 + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{24x}{(4y^3 + 3)^2} - \frac{12y^2(12x^2 + 5)^2}{(4y^3 + 3)^3}$$

مثال(18):

إذا كان $(x+y)^2 = xy$

اثبت أن

$$(x+2y)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 = 0$$

الحــل:

فاضل بالنسبة إلى x ،

$$2(x+y)\ (1+y') = xy' + y$$

فاضل مرة ثانية

$$2(x+y)\ (y'') + 2(1+y')\ (1+y') = xy'' + y' + y'$$

$$2xy'' + 2yy'' + 2(1+y')^2 = xy'' + 2y'$$

$$y''(2x+2y-x) + 2\left((1+y')^2 - y'\right) = 0$$

$$(x+2y)y'' + 2\left(y'^2 + y' + 1\right) = 0$$

$$(x+2y)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2 = 0$$ انتهى البرهان

2) **<u>المعادلات البارامترية: Parametric Equations</u>**

في هذا الجزء من بند 4-2 نقدم طريقة جديدة لوصف المنحنيات المستوية باستعمال ما يسمى بالمعادلتين البارامتريتين للمنحنى. فإذا كانت f دالة مستمرة فإن $gr(f)$ يسمى منحنى مستوى. والتعريف الأكثر عمومية للمنحنى المستوى هو:

<u>تعريف:</u>

المنحنى المستوى هو مجموعة C من أزواج مرتبة $(f(t), g(t))$ بحيث f و g مستمرتان على فترة ℓ.

وقد اعتدنا للتبسيط استعمال كلمة منحنى فقط بدلا من منحنى مستوى .
وبيان c في التعريف السابق يتكون من جميع النقط $P(t)=(f(t),g(t))$ في المستوى xy لقيم t في الفترة ℓ.
والمعادلتان ،

$$x=f(t)\ ,\ y=g(t)\ ,\ t\in\ell$$

يسميان المعادلتان البارامتريتان للمنحنى c بالبارامتر t.
وأحياناً يقال المعادلتان الوسيطيتان للمنحنى c بالوسيط t.
وللحصول على الصورة الديكارتية لمعادلة المنحنى ، نحذف البارامتر t من المعادلتين البارامتريتين .

$$f^{-1}(x)=g^{-1}(x)$$

$$y=g\left(f^{-1}(x)\right)$$

أو

$$x=f\left(g^{-1}(y)\right)$$

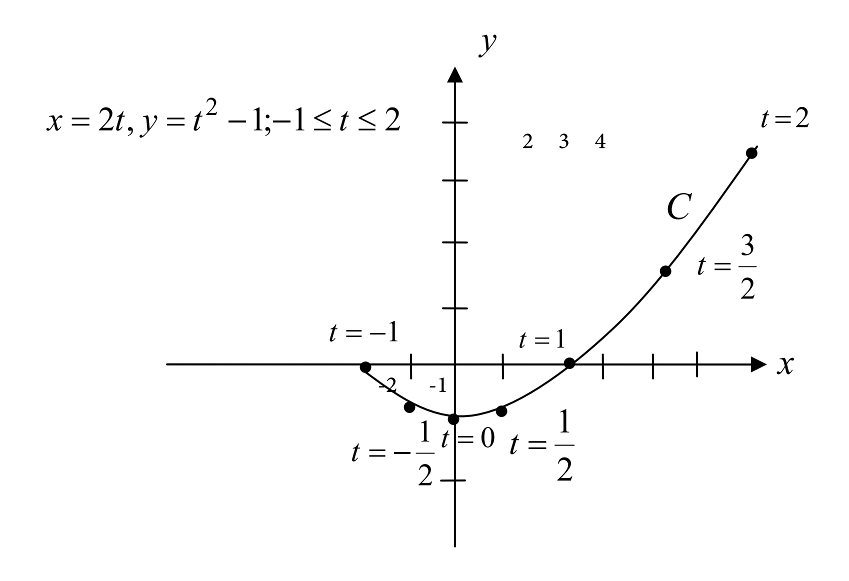
فمثلا إذا كان C منحنى معادلته البارامتريتين هما

$$x=2t\ ,\ y=t^2-1\ ,\ -1\leq t\leq 2$$

للحصول على شكل المنحنى دعنا نكون الجدول الآتي:

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	1-	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

توقيع هذه النقط في المستوى الكارتيزي يؤدي إلى الشكل الواضح في شكل (84).



شكل (84)

ولإيجاد الصورة الديكارتية لمعادلة المنحنى دعنا نحذف t من المعادلتين. بحل الأولى بالنسبة إلى t نجد $t = \frac{x}{2}$

وبالتعويض في الثانية

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية سبق دراستها تمثل قطع مكافئ متماثل بالنسبة للمحور y تماماً كالمبين في شكل (84) .

إذا أمكن الحصول على الصورة الديكارتية كان من السهل إذن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ ولكن دورنا الآن الحصول على $\frac{dy}{dx}$ بدون التحويل إلى الصورة الديكارتية التي يصعب غالباً الحصول عليها. مثل

$$x = \frac{2at}{1+t^2} \quad , \quad y = \frac{b\left(t^2 - 1\right)}{\left(t^2 + 1\right)}$$

أ،

$$x = t - t^{2/3} \quad , \quad y = 1 + t^{1/3} - t^2$$

وهكذا لذلك نورد المبرهنة التالية ،

مبرهنة : (مشتقة الدالة المعرفة بارامتريا)

"إذا علم المعادلتين البارامتريتين $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ لمنحنى أملس متصل C فإن ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ للمنحنى عند $p(x, y)$ هو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad , \quad \frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ "}$$

وقد اعتدنا استعمال الشرطة Prime أي y' لترمز $\frac{dy}{dx}$ ولأن نستعمل النقطة dot أيْ $\dot{y}$ أ، $\dot{x}$ لترمزان إلى $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ على الترتيب . أي أن ،

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad , \quad \dot{x} \neq 0$$

والبرهان يأتي مباشرة باستعمال دالة الدالة ، حيث

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

وللحصول على المشتقة الثانية ،

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{(y')}}{\dot{x}}$$

ويجب ملاحظة أن ،

$$y'' \neq \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}$$

مثال (19)

إذا كان C هو منحنى ممثلاً بارامتريا على النحو

$$x = t^3 - 3t \quad , \quad y = t^2 - 5t - 1 \quad , \quad t \in R$$

أ) أوجد معادلة المماس لـ C عند نقطة بارامترها $t = 2$

ب) أوجد النقطة التي يوازى المماس عندها المحور x أو المحور y.

جـ) أوجد $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$

د) أوجد المعادلة الديكارتية للمنحنى C.

الحـل:

أ) $$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y' = \frac{2t - 5}{3t^2 - 3}$$

ميل المماس عند $t = 2$ هما، $x = 2^3 - 3(2) = 2$ ، $y = 2^2 - 5 \times 2 - 1 = -7$

معادلة المماس ، $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 7 = -\frac{1}{9}(x - 2)$$

أيْ $$x + 9y + 61 = 0$$

ب) بما أن $$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

ب1) المماس // المحور x لما $\dot{y} = 0$ أيْ

عند $$2t - 5 = 0$$

$$t = 5/2$$

والنقطة هي $$\left(\frac{65}{8}, -\frac{29}{4}\right)$$

ب2) المماس // المحور y لما $\dot{x}=0$ أيْ

$$3t^2-3=0$$
$$t=\pm 1$$

أيْ أن هناك نقطتان يكون عندها المماس رأسيا هما ،

$$t=-1\equiv(2,5) \quad ، \quad t=1\equiv(-2,5)$$

جـ) $$y''=\frac{(y')}{\dot{x}}$$

$$(y')=\frac{(3t^2-3)(2)-(2t-5)(6t)}{(3t^2-3)^2}$$
$$=\frac{6t^2-6-12t^2+30t}{9(t^2-1)^2}$$
$$=\frac{-6t^2+30t-6}{9(t^2-1)^2}$$
$$=\frac{-2t^2+10t-2}{3(t^2-1)^2}$$
$$y''=\frac{\dfrac{-2t^2+10t-2}{3(t^2-1)^2}}{3t^2-3}$$

د) نحاول حذف t من المعادلتين ،

$$x=t(t^2-3)$$
$$y=t^2-5t-1 \quad ،$$
$$t^2=y+5t+1$$
$$x=t(y+5t-2)$$

$$
\begin{aligned}
x &= ty + 5t^2 - 2 \\
&= ty + 5(y + 5t + 1) - 2t \\
&= ty + 5y + 25t + 5 - 2t \\
&= ty + 23t + 5y + 5
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad x - 5y - 5 = t(y + 23)$$

$$t = \frac{x - 5y - 5}{y + 23}$$

بالتعويض في معادلة y ،

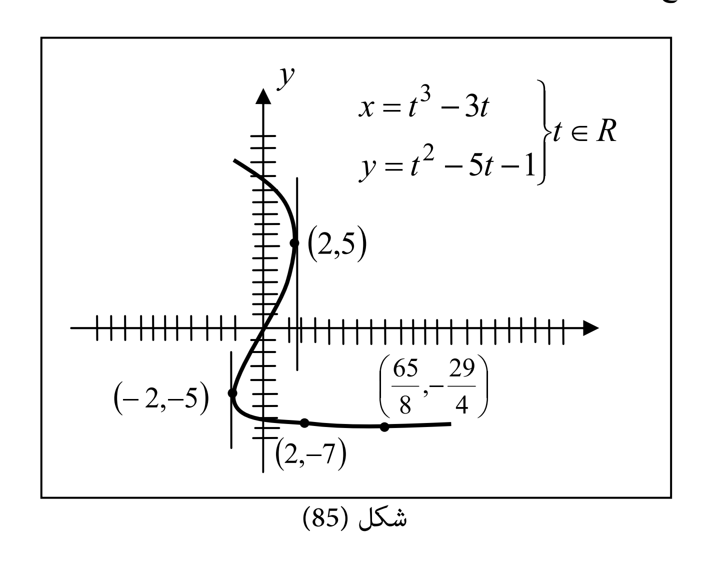
$$y = \left(\frac{x - 5y - 5}{y + 23}\right)^2 - 5\left(\frac{x - 5y - 5}{y + 23}\right) - 1$$

ومنها

$$(y+1)\ (y+23)^2 = (x - 5y - 5)\ (x - 10y - 120)\ \ y \neq -23$$

وهي المعادلة الديكارتية للمنحنى

وشكل (85) يوضح بيان المنحنى .



شكل (85)

تمارين 4-2

من (1) إلى (20)، بفرض أن المعادلة تعين دالة قابلة للتفاضل f بحيث $y = f(x)$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

1) $2x^2 + 3y^2 = 10$

2) $5x^4 - 2y^4 = xy$

3) $2x^3 + x^2 y + y^2 = 5$

4) $5x^2 + 2x^2 y + y^3 = 6$

5) $2x^2 - 3xy^2 - 4y^2 = 0$

6) $x^4 + x^2 y^2 - 2xy^2 + yx^2 + x = 0$

7) $x^{1/3} + y^{1/3} = 9$

8) $x^{2/3} + y^{2/3} = 16$

9) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}$

10) $x^2 + \sqrt{xy} = 7$

11) $2x - \sqrt{xy} + y^3 = 6$

12) $y = \dfrac{x+y}{x-y}$

13) $y = \sqrt{\dfrac{y+2}{xy-3}}$

14) $x = \sqrt{\dfrac{x+2}{xy-3}}$

15) $y = \sqrt{x^2 - y^2 + 3xy}$

16) $y^2 + x^2 2y - 4x - 2 = 0$

17) $\frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

18) $y^2 = \left[1 + x^2 - y^2\right]^{3/2}$

19) $\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^2 - 4a^2x^2 = b^2$

20) $x^3 - y^3 = 1$

من (21) إلى (29) أوجد معادلة المماس والعمودي عند النقطة P

21) $xy + 16 = 0$ ، $P(-2,8)$

22) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ، $P(2,3)$

23) $y^2 - 4x^2 = 5$ ، $P(-1,3)$

24) $2x^3 - x^2y + y^2 - 1 = 0$ ، $P(2,-3)$

25) $xy^2 + 3y = 27$ ، $P(2,3)$

26) $5x^2 - 4y^2 = 56$ ، $P(-2,3)$

27) $9x^2 - 4y^2 = 72$ ، $P(2,3)$

28) $2x^2 - 5y^2 = 3$ ، $P(-2,1)$

29) $3y^2 - 2x^2 = 40$ ، $P(2,-4)$

30) اثبت أن معادلة المماس للدائرة، $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

عند نقطة $\left(x_1, y_1\right)$ على محيطها هي

$$x_1x + y_1y + a\left(x_1 + x\right) + b\left(y_1 + y\right) + c = 0$$

31) اثبت أن معادلة المماس للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \ \ a > b > 0$$

عند $P(x_1, y_1)$ هي $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

32) اثبت أن معادلة المماس للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

عند النقطة $P(x_1, y_1)$ هي $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

33) اثبت أن إذا مر العمودي على القطع الناقص (تمرين31) بمركز القطع (0،0) فإن القطع يكون دائرة .

34) أوجد معادلة المماس لبيضة كاسينى ،

$$\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^2 - 4a^2 x^2 = b^4$$

عندما $a = 2$ ، $b = \sqrt{6}$ عند النقطة $P\left(2, \sqrt{2}\right)$

35) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

عندما $a = 2$ عند النقطة $P(6,6)$

36) كرر تمرين (35) للمعادلة $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy$

، $a = \sqrt{2}$ ، $P(1,1)$

أوجد النقط التي يوازي عندها المماس المستقيم $y = x$.

في التمارين من (37) إلى (42) أوجد معادلتي المماس والعمودي عند النقطة المعطاة:

(37) $y = t^2 - 1$, $x = t^2 + 1$ ، $-2 \le t \le 2$ ،عند $t = 1$

(38) $y = t^3 - 1$, $x = t^3 + 1$ ، $-2 \le t \le 2$ ،عند $t = -1$

(39) $y = 2t + 3$, $x = 4t^2 - 5$ ، $t \in R$ ، عند $t = 2$

(40) $y = t^{3/2}$, $x = t^{3/2}$ ، $t \in R$ ، عند $t = 64$

(41) $y = 3t + 4$, $x = \sqrt{t}$ ، $t \ge 0$ ، عند، $t = 4$

(42) $x^2 + t^2 - 2xt = 1$ ، $y^2 + t^2 - yt = 21$

عند $t = -1$ ، x ، y أكبر من 0 .

(43) في التمارين من (37) إلى (41) أوجد الصورة الكارتيزية لمعادلة المنحنى.

(44) أوجد النقطة على المنحنى $x = -t^3$ ، $y = -6t^2 - 18t$

يكون عندها ميل المماس أ) 2 ب) 0

(45) أوجد النقطة على المنحنى $x = t^2 + t$ ، $y = 5t^2 - 3$

يكون عندها ميل المماس أ) 4 ب) 1-

في التمارين من (46) إلى (48) أوجد نقط المنحنى C التي يكون عندها المماس أفقياً أو رأسياً وأوجد d^2y/dx^2 ثم أرسم بيان C.

(46) $y = \sqrt[3]{t} - t$, $x = \sqrt[3]{t}$ ، $t \in R$

(47) $y = \sqrt{t}$, $x = 3t^2 - 6t$ ، $t \ge 0$

(48) $y = t^2 - 5t$, $x = 12t - t^3$ ، $t \in R$

(49) إذا كان C هو المنحنى $y = 6\dfrac{t}{1+t^2}$, $x = 2\dfrac{\left(1-t^2\right)}{1+t^2}$

اثبت أن $4yy'' + 4y'^2 + 9 = 0$

(50) اثبت أن ، $y'' = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$ واستخدم هذه الصيغة في إيجاد y'' للتمارين من (37) إلى (41) عند النقطة المعطاة .

الباب الرابع

مشتقات الدوال المثلثية

في هذا الباب سوف نفحص النهايات التي تحتوى على دوال مثلثية ومشتقات هذه الدوال وعندما نناقش نهاية تحتوى على نسبة مثلثية مثل $\sin x$، $\cos t$، $\tan\theta$، وهكذا سوف نفترض دائماً أن المتغير x، t أو θ هو زاوية مقاسة بالتقدير الدائري. ولسوف الآن بعض مبرهنات الدوال المثلثية الهامة.

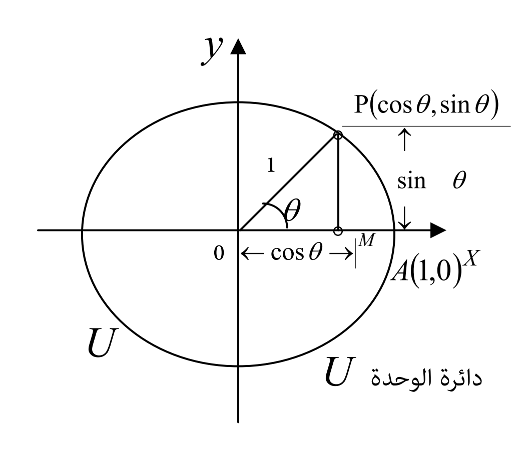
بند 4-1 نهايات الدوال المثلثية.

مبرهنة 1

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1 \text{ ،} \lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$$

البرهان

لنعتبر دائرة الوحدة U كما في شكل (86) والزاوية θ في وضعها القياسي المحصورة بين الراسم OP والمحور x موجبة عندما ندور من x عكس عقارب الساعة.



شكل (86)

ومن تعريف الجيب وجيب التمام

(الجيب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، وجيب التمام= $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ وينتج أن

المقابل = الوتر جاθ= جاθ أيْ $\sin\theta$

والمجاور = الوتر جتاθ= جتاθ أيْ $\cos\theta$) نجد أن إحداثي النقطة P هما $(\cos\theta, \sin\theta)$، ويتضح أن إذا $\theta \to 0$ فإن $\sin\theta \to 0$ و $\cos\theta \to 1$

ولبرهان النهايتين، نقول إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فإن، $0 < \text{MP} < \widehat{\text{AP}}$ حيث MP طول القطعة المستقيمة PM، $\widehat{\text{AP}}$ طول القوس الدائري من A إلى P.

من تعريف الزاوية بالتقدير الدائري،

$$\theta = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}}$$

$$= \frac{\widehat{\text{AP}}}{1}$$

أيْ $\widehat{\text{AP}} = \theta$

إذن $0 < \sin\theta < \theta$

يتبع من مبرهنة السندوتش (الانحصار) أن

لما $\theta \to 0$، $0 < \sin\theta < 0$ أيْ

$$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$$

وهو أول مطلوب، كذلك

$$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = \lim_{\theta \to 0} \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1 - 0} = 1$$

انتهى البرهان.

مبرهنة (2)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

__البرهان__

بالرجوع إلى شكل (87) حيث U هي دائرة الوحدة، وبفحص المثلث OAQ،

ومن تعريف الظل = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$$\tan\theta=\frac{QA}{oA}=\frac{QA}{1}$$
$$\Rightarrow QA=\tan\theta$$

ومما سبق،

$$MP=\sin\theta$$

شكل (87)

ونلاحظ من الرسم

مساحة المثلث AQQ > مساحة القطاع POA > مساحة المثلث AOP ولكن من هندسة الشكل،

$$\Delta AOP=\frac{1}{2}OA\times PM=\frac{1}{2}(1)(\sin\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta$$
$$\Delta AOP=\frac{1}{2}OA\times AQ=\frac{1}{2}(1)(\tan\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta$$

AOP مساحة القطاع الدائري $=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}\theta$

إذن $\quad \div\sin\theta\neq 0 \qquad \dfrac{1}{2}\sin\theta<\theta<\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

أو $\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$

وحيث أن $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ ، فإن عندما $\theta \to 0$

$$1 < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

أيْ أن $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

انتهى البرهان

مبرهنة (3)

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0}$$

البرهان

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)}{\theta}\cdot\frac{(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0$$

مثال (1)

أوجد النهايات الآتية :

1) $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin 5\theta}{2\theta}$ 　　 2) $\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{4\theta}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{2x+3-3\cos x}{4x}$ 　　 4) $\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

الحــل:

1)
$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin 5\theta}{2\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{5}{2}\frac{\sin(5\theta)}{(5\theta)}$$
$$=\frac{5}{2}\lim_{5\theta\to0}\frac{\sin 5\theta}{5\theta}$$
$$=\frac{5}{2}\times1=\frac{5}{2}$$

2)
$$\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{4\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{4}\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

3)
$$\lim_{x\to0}\frac{2x+3-3\cos x}{4x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left(2+\frac{3(1-\cos x)}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{4}(2+3\times0)=\frac{1}{2}$$

4)
$$\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=(1)^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

مثال (4) أوجد النهايات

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\pi/2}$ 2) $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta^3 \sin\theta}{\sin^4\theta}$

3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+2\cos x}{x^2+1}$ 4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\csc x}{x^2+1}$

الحـل:

1) بوضع $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ ، $t\to 0 \Leftarrow x\to\dfrac{\pi}{2}$

، $x=t+\dfrac{\pi}{2}$ إذن،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t}$$

$\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ زاويتها منسوبة إلى $\dfrac{\pi}{2}$ تتحول إلى $\sin t$ ولكن $t+\dfrac{\pi}{2}$ في الربع الثاني $\cos\theta$ سالب

$$\therefore\ \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t$$

$$\text{النهاية} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t} = -1$$

2)
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3\tan\theta}{\sin^4\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3\sin\theta}{\sin^4\theta\cos\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3}{\sin^3\theta\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^3 \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= 1^3 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2\cos x}{x^2 + 1} = \frac{0 + 2(1)}{0 + 1} = 2$$

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{x \csc x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \dfrac{1}{\sin x}}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\sin x} \right)}{\lim_{x \to 0} \left(x^2 + 1 \right)} = \frac{1}{0 + 1}$$

$$= 1$$

مثال (5)

أوجد $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{x}$$

الحـل:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{x} = \frac{0}{0}$$ (غير معينة)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{x} \cdot \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{x}$$

النهاية الأولى نجد أن بوضع

$$u=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$$

فإن

$$\lim_{x\to 0}\ u=0$$

أيْ $x\to 0$ تؤدي إلى $u\to 0$

$$\lim_{u\to 0}\ \frac{\sin u}{u}=1$$

والنهاية الثانية، نضرب في المرافق،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\ \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$$

إذن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}=1\times 1=1$$

تمارين (4-1)

في التمارين من (1) إلى (38) أوجد النهاية إذا كانت موجودة.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$

(3) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^3\theta}{(2\theta)^3}$

(4) $\lim_{t\to 0}\frac{2t+\sin 2t}{t}$

(5) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta\sin\theta}{\tan^2\theta}$

(6) $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 3t}{t}$

(7) $\lim_{\theta\to 0}\frac{3\cos - 3}{\theta^2}$

(8) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+\cos x}$

(9) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\sin 7t}{\cos t\tan 14t}$

(10) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{x^2+x^3}$

(11) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(12) $\lim_{u\to 0}\frac{4u^2+3u\sin u}{u^2}$

(13) $\lim_{x\to 0}\frac{1-2x^2-2\cos x+\cos x^2}{x^2}$

(14) $\lim_{\theta\to 0}\frac{x\cos x-x^2}{2x}$

(15) $\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1-\sin t}$

(16) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1+\cos t}$

(17) $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t}$

(18) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}$

(19) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{\sin x}$

(20) $\lim_{t\to 0}t\cot t$

(21) $\lim_{x\to 0}\frac{\csc 3x}{\cot 7x}$

(22) $\lim_{\eta\to 0}\eta^2\csc\eta^2$

(23) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x}$

(24) $\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(25) $\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{\sin(3x-2)}{6x-4}$

(26) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

(27) $\lim_{x\to 2}\frac{\sin\left(x^2-5x+6\right)}{x^2-2x}$

(28) $\lim_{x\to -1}\frac{1-\cos(x+1)}{x^2-3x+2}$

(29) $\lim_{x\to 3}\frac{\sin\left(\sqrt{x-2}-1\right)}{(x-3)}$

(30) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}$

(31) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{4\tan^2 x}$

(32) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\sin 2x}{3x}$

(33) $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+3x-2}{5x}$

(34) $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+1-\cos^2 x}{\sin^2 x}$

(35) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{1-\cos x}$

(36) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x^2}$

(37) $\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x^2}$

(38) $\lim_{x\to 0}x(\csc x-1)$

(39)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos(\pi x)}{2x-3} & ,x<3/2\\ \pi/2 & ,x=\pi/2\\ \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{2}(2x-3)\right\}}{2x-3} & ,x>3/2\end{cases}$$

عند النقطة $x=\frac{\pi}{2}$.

بند 4-2 : تفاضل الدوال المثلثية

الآن نستطيع إنشاء المعادلات الخاصة بتفاضل الدوال المثلثية حيث نحتاج زيادة على مبرهنات البند السابق أن نسترجع بعض المعطيات المثلثية الهامة. ومن المتطابقات التي استخدمناها في البند السابق مجموعات هما.

المجموعة الأولى: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ، $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ ،

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ ، } \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

والمجموعة الثانية: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$,

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \ ,$$

ونضيف الآن متطابقات الزاوية المركبة من مجموع أو فرق بين زاويتين

المجموعة الثالثة: $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

وبوضع $A = B = \theta$ نحصل على

المجموعة الرابعة: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

أو $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

أو $\cos 2\theta = 1 - \sin^2\theta$

ويمكن كتابة المتطابقة الأخيرتين في صورتين هامتين

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \text{ ، } \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

وسوف نبرهن الآن في المبرهنة الآتية

مبرهنة : (مشتقات الدوال المثلثية)

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad , \quad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x,$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad , \quad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x,$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = -\sec^2 x \quad , \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x,$$

البرهان

من التعريف

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

نجد أن،

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1
\end{aligned}$$

إذن

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

وبنفس الطريقة،

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cosh+\sin x\sinh-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos x\left(\frac{\cosh-1}{h}\right)-\sin x\left(\frac{\sinh}{h}\right)$$

$$=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}$$

$$=\cos x(0)-\sin x(1)$$

إذن

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

وكذلك

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos}\right)$$

$$=\frac{\cos x(\cos x)-\sin x(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x$$

إذن

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=-\sec^2 x$$

ولإيجاد مشتقة قاطع الزاوية، نكتب أولاً

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}$$

إذن

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{-1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

إذن

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$$

وبنفس الطريقة

$$\frac{d}{dx}(\csc x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\cos x$$

$$=-\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=-\csc x\ \cot x$$

وكذلك

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{\sin x(-\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

انتهى البرهان.

مثال (6)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، $y=\frac{\cos\sqrt{x}}{1+\sin x}$

الحـــل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}\left(\cos\sqrt{x}\right)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}\left(\cos\sqrt{x}\right)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{(1+\sin x)\left[-\sin x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]-\cos\sqrt{x}[\cos x]}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{\sin x\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\cos\sqrt{x}\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\left(\sin x+\sin x\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\cos x\right)}{2\sqrt{x}(1+\sin x)^2}$$

مثال (7)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، $y=\sec x(1+\tan x)^{1/2}$

الحـــل:

$$\frac{dy}{dx}=\sec x\left[\frac{1}{2\sqrt{1+\tan x}}\cdot\sec^2 x\right]+\sqrt{1+\tan x}\cdot\sec x\tan x$$

$$=\frac{\sec x}{2\sqrt{1+\tan x}}\left(\sec^2 x+2(1+\tan x)\tan x\right)$$

$$=\frac{\sec x\left(1+2\tan x+3\tan^2 x\right)}{2\sqrt{1+\tan x}}$$

مثال (8)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، $y=\sin(x\cos x)+\sin x\cos x\tan^2 x$

الحـــل:

$$\frac{dy}{dx}=\cos(x\cos x)[x(-\sin x)+\cos x]$$
$$+(\ \sin x\cos x+x\cos x\cos x+x\sin x(-\sin x))+\sec^2(x^2)\cdot 2x$$
$$\frac{dy}{dx}=(\cos x-x\sin x)\cos(x\cos x)+x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$
$$+\sin x\cos x+2x\sec^2 x(x^2)$$

مثال (9)

إذا كان $y=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y\sin x}{y+x\sin y}\right)$

أوجد معادلة المماس عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

الحـــل:

يفضل ضرب الطرفين والوسطين لنحصل على

$$y^2+yx\sin y=\frac{\pi}{2}(x+y\sin y)\quad,\quad y+x\sin y\neq 0$$

أيْ $x\neq 0\ ,\ y\neq 0$

فاضل بالنسبة إلى x،

$$2yy'+y'x\sin y+y\sin y+yx\cos y\cdot y'=\frac{\pi}{2}(1+y'\sin x+y\cos x)$$

جمع في الطرف الأيسر،

$$y'\left[2y + x\sin y + yx\cos y - \frac{\pi}{2}\sin x\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}(1 + y\cos x) - y\sin y$$

$$y' = \frac{\frac{\pi}{2}(1 + y\cos x)y\sin y}{2y + x\sin y + xy\cos y - \frac{\pi}{2}\sin x}$$

وميل المماس عند $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هو

$$m = y'\Big|_{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\frac{\pi}{2}(1+0) - \frac{\pi}{2}(1)}{\pi + \frac{\pi}{2}(1) + \frac{\pi}{2}(1+0)}$$

$$= \frac{0}{\pi} = 0$$

$\therefore$ المماس يوازي المحور x ومعادلته، $y = \frac{\pi}{2}$

مثال (10)

أوجد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$ ، $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=\pi/2}$

$$x = \theta - \sin\theta \quad ، \quad y = \theta^2 + 2\cos\theta$$

الحـل:

$$\dot{x} = 1 - \cos\theta \quad , \quad \dot{y} = 2\theta - 2\sin\theta$$

$$\ddot{x} = \sin\theta \quad , \quad \ddot{y} = 2 + 2\cos\theta$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2(\theta - \sin\theta)}{1 - \cos\theta}$$

$$y'\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{1 - 0} = \pi$$

$$(y')^{\cdot} = 2\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta) - (\theta - \sin\theta)\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}$$

$$(y')^{\cdot} = 2\frac{(1-\cos\theta)^2 - \sin\theta(\theta - \sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2}$$

$$y'' = \frac{(y')^{\cdot}}{\dot{x}}$$

$$y''^{\cdot} = 2\frac{(1-\cos\theta)^2 - \sin\theta(\theta - \sin\theta)}{(1-\cos\theta)^3}$$

$$y''\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2\frac{(1-0)^2 - 1\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{(1-0)^3}$$

$$= 2\frac{1 - \frac{\pi}{2} + 1}{1}$$

$$= 4 - \pi$$

تمارين (3-2)

اوجد المشتقة الأولى في التمارين من (1) إلى (53):

1) $f(x)=4\cos x$

2) $H(t)=7\tan t$

3) $G(v)=5v\csc v$

4) $f(x)=x\sin x$

5) $f(x)=x-x^2\cos x$

6) $y(x)=x^2-x\sin x$

7) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

8) $g(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$

9) $g(t)=t^4\sin t$

10) $f(x)=x^2\sec x$

11) $u(\theta)=2\theta\cot\theta+\theta^2\tan\theta$

12) $R(\alpha)=3\alpha^2\sec\alpha-\alpha^3\tan\alpha$

13) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

14) $R(\beta)=\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}$

15) $g(x)=\dfrac{1}{\sin x\tan x}$

16) $k(u)=\dfrac{1}{\cos u\cot u}$

$$g(x) = (x + \csc x)\cot x \quad (17$$

$$k(\phi) = (\sin\phi + \cos\phi)^2 \quad (18$$

$$f(r) = \frac{\tan r}{1 + r^2} \quad (19$$

$$k(\theta) = \frac{1 + \sec\theta}{1 - \sec\theta} \quad (20$$

$$u(t) = \frac{\csc t}{\sec t} \quad (21$$

$$H(x) = (\cot x + \csc x)(\tan x - \sin x) \quad (22$$

$$f(z) = \frac{1 + \sec z}{\tan z + \sin z} \quad (23$$

$$H(\theta) = \cos^5 3\theta \quad (24$$

$$g(x) = \sin^4\left(x^3\right) \quad (25$$

$$g(z) = \sec(2z + 1)^2 \quad (26$$

$$k(t) = \csc\left(t^2 + 4\right) \quad (27$$

$$y(x) = \cot\left(x^3 - 2x\right) \quad (28$$

$$f(x) = \tan\left(2x^2 + 3\right) \quad (29$$

$$f(x) = \cos\left(3x^2\right) + \cos^2(3x) \quad (30$$

$$g(\omega) = \tan^3 6\omega \quad (31$$

$$F(x) = \csc^2 2s \quad (32$$

$$M(t) = \sec\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (33$$

$$y(x) = x^2 \cot 3x \quad (34$$

$$f(x) = x\csc\left(x^2\right) \quad (35$$

36) $h(\theta)=\tan^3\theta\sec^2\theta$

37) $H(u)=u^2\sec^3 4u$

38) $N(x)=(\sin 5x-\cos 5x)^5$

39) $f(x)=\cot^3(2x+1)$

40) $g(x)=\sin(2x+3)^4$

41) $f(x)=\dfrac{\cos 4x}{1-\sin 4x}$

42) $f(x)=\left(\tan^3 3x-\sec^3 3x\right)$

43) $h(\phi)=(\tan 2\phi-\sec 2\phi)$

44) $f(x)=\sin\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}$

45) $f(x)=\tan\sqrt[3]{3-8x}$

46) $r(t)=\sqrt{\sin 2t-\cos 2t}$

47) $h(\phi)=\dfrac{\cot 4\phi}{\sqrt{\phi^2+4}}$

48) $g(x)=\sqrt{x^2+1}\tan\sqrt{x^2+1}$

49) $M(x)=\sec\sqrt{x}+\sqrt{4x+1}$

50) $h(x)=\sqrt{4+\csc^2 3x}$

51) $f(t)=\sin^2 2t\sqrt{\cos 2t}$

52) $y(x)=3x+\sin 3x$

53) $f(x)=\sin^3\sqrt{x}$

من (54) إلى (61) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

54) $\sin^2 3y=x+y-1$

55) $x=\sin(xy)$

56) $y=\csc(xy)$

57) $y^2+1=x^2\sec y$

58) $y^2=x\cos y$

59) $xy=\tan y$

60) $x^2+\sqrt{\sin y}-y^2=1$

61) $\cos\sqrt{y}-4x=2y$

62) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى $4y^4+4x-x^2\sin y-4=0$
عند النقطة $\mathrm{P}(1,0)$

63) إذا كان $y=x^2\sin y$ أثبت أن $y'=\dfrac{2x\sin y}{1-x^2\cos y}$

64) إذا كان $y=u\sin u$ ، $u=x^3$ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$.

65) إذا كان $f(x)=\cos 2x+2\cos x\ ,\ 0\le x\le 2\pi$
أوجد النقط التي عندها المماس أفقياً.

66) إذا كان $y=\tan^3 4x$ أثبت أن $y'=12\left(y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)$

67) أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الدالة f عند $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{4},f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

أ) $f(x)=\sec x$

ب) $f(x)=\csc x+\cot x$

68) أوجد النقط التي يكون عندها مماس $gr(f)$ أفقياً

أ) $f(x)=\cos x+\sin x\ ,\ 0\le x\le 2\pi$

ب) $f(x) = \cos x - \sin x \; , \; 0 \le x \le 2\pi$

جـ) $f(x) = \csc x + \sec x \; , \; 0 < x < \frac{\pi}{2}$

د) $f(x) = 2\sec x - \tan x \; , \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

هـ) $f(x) = x + 2\cos x$

و) $f(x) = x + \sin x$

69) أوجد معادلة المماس والعمودي على C عند $t = \frac{\pi}{2}$

أ) $C: \; x = 2\sin t \; , \; y = 3\cos t \; , \; 0 \le t \le 2\pi$

ب) $C: \; x = \cos t - 2 \; , \; y = \sin t + 3 \; , \; 0 \le t \le 2\pi$

جـ) $C: \; x = \cos^3 t \; , \; y = \sin^3 t \; , \; 0 \le t \le 2\pi$

د) $C: \; x = t - \cos t \; , \; y = t\sin t \; , \; t \in R$

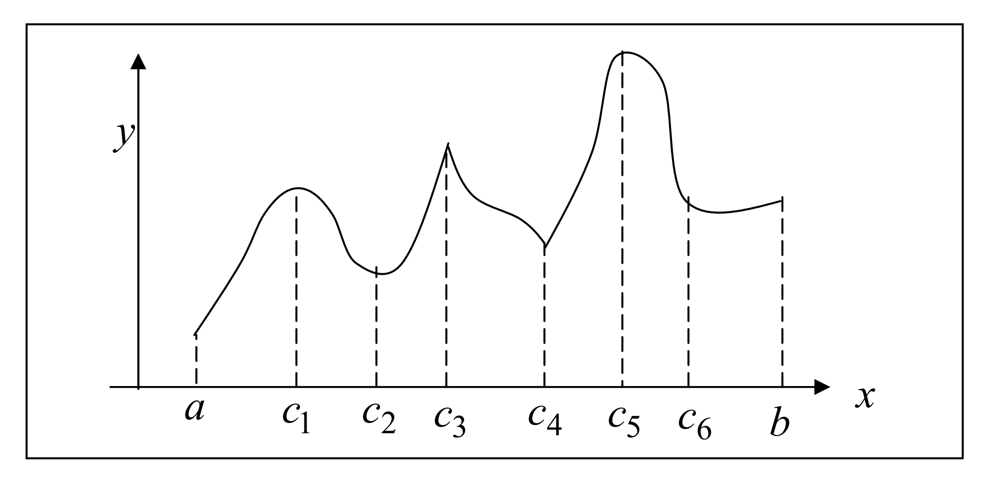
(

الباب الخامس

الحدود القصوى للدوال

بند 5-1: الحدود القصوى للدوال Extreme of functions

إذا كان شكل (88) يمثل كمية فيزيائية y مثل درجة الحرارة أو مقاومة كهربية أو ضغط الدم أو مقدار مادة كيميائية في محلول أو غيرهم وتغيرها مع الزمن x. في الفترة $[a,b]$



شكل (88)

يتضح من الشكل أن y تتزايد في الفترات $[a,c_1]$، $[c_2,c_3]$، $[c_4,c_5]$ ومتناقصة خلال الفترات $[c_1,c_2]$، $[c_3,c_4]$، $[c_5,c_6]$ وثابتة في الفترة $[c_6,b]$

وهذه التزايدات والتناقصات تحدث في جميع الدوال. وفيما يلي نعطي تعريفا دقيقاً لمعنى التزايد والتناقص.

تعريف: " إذا كان f دالة معرفة على فترة I، x_1، x_2 عددين في I. فإن:

أ- f تزايدية على I إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$.

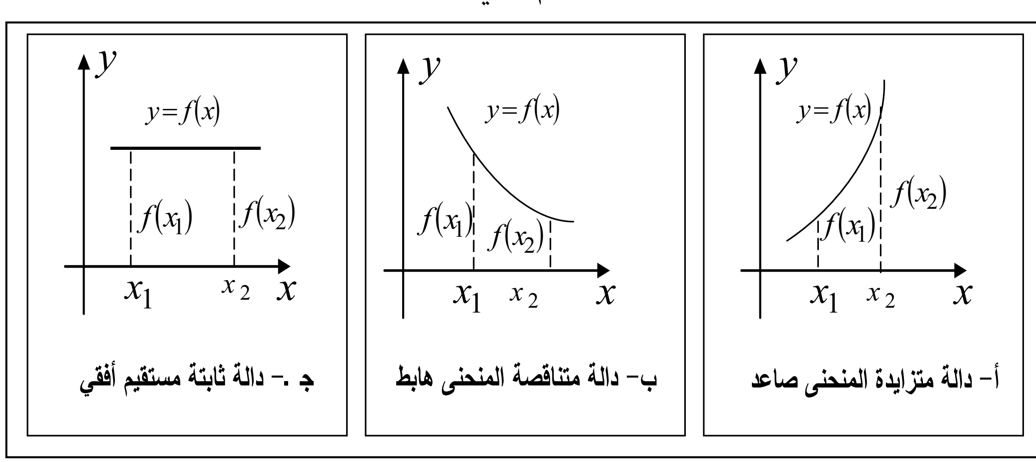
ب- f تناقصية على I إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$.

جـ f ثابتة على I إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ لكل x_1، x_2.

وشكل (89) يوضح بيان التعريف السابق. حيث نرى في شكل (89-أ) أن الدالة المتزايدة بيانها صاعدا كلما زادت x.

وفي شكل (89-ب) أن الدالة المتناقصة وبيانها هابطا كلما زادت x.

أما شكل (89-جـ) فالدالة ثابتة وبيانها مستقيم أفقي.



شكل (89)

إذا رجعنا لشكل (88) وركزنا على الفترة $[c_1, c_4]$ نجد أن الكمية الفيزيائية y تبلغ أكبر قيمة لها (نهاية عظمى) عند c_3 وأصغر قيمة لها (نهاية صغرى) عند c_2. كما توجد قيم كبرى وقيم صغرى مختلفة في الفترات الأخرى. وإذا اعتبرنا الفترة $[a, b]$ بكاملها نجد أن النهاية العظمى تحدث عند c_5. والنهاية الصغرى عند a. ولذلك نعرف النهاية العظمى والنهاية الصغرى لدالة f على النحو التالي

تعريف: إذا كان f دالة معرفة على مجموعة S من الأعداد الحقيقية، c عدد في S.

أ- $f(c)$ تكون نهاية عظمى لـ f على S، إذا كان $f(c) \geq f(x)$ لكل x في S.

ب- $f(c)$ تكون نهاية صغرى لـ f على S،إذا كان $f(c) \leq f(x)$ لكل x في S.

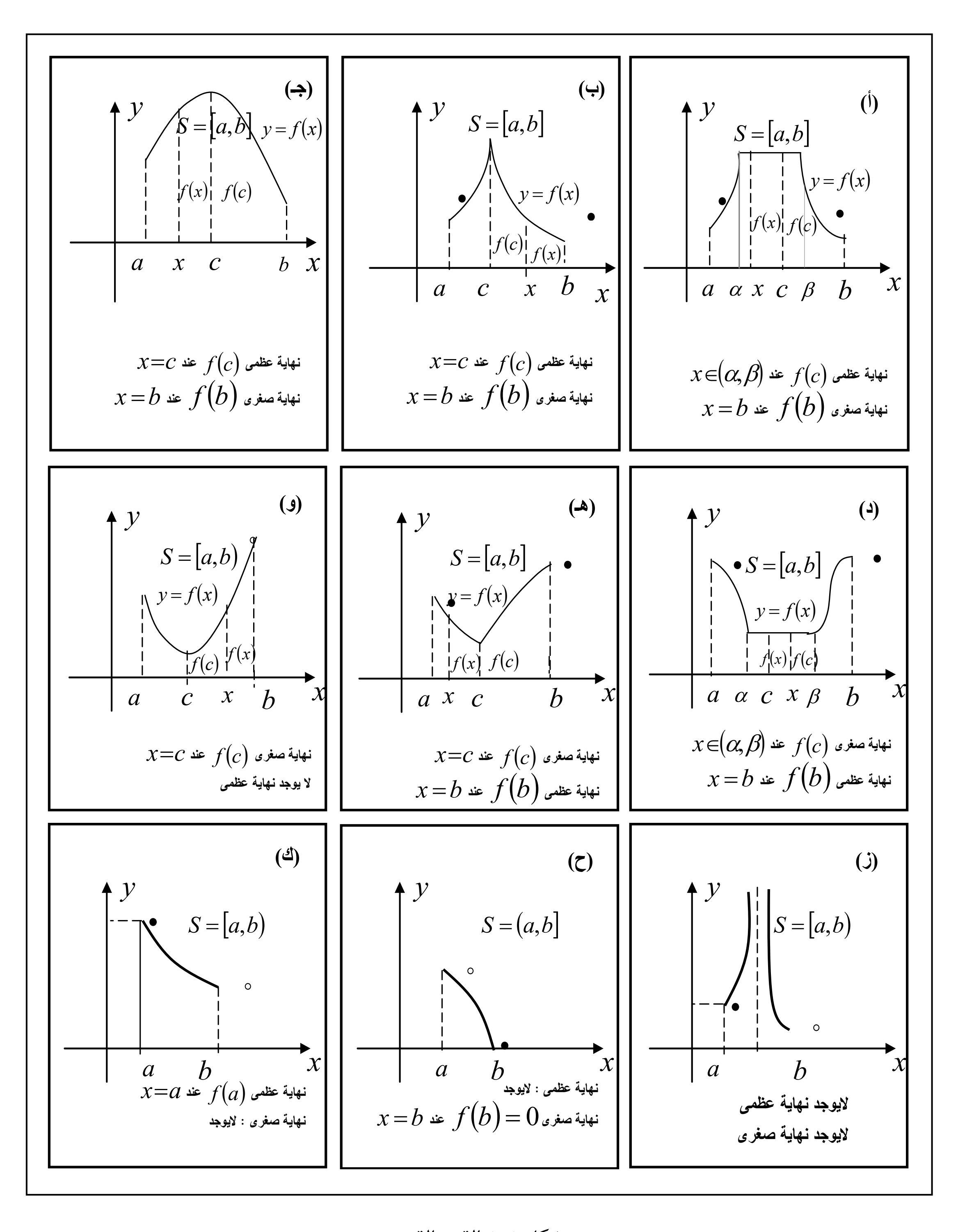
وشكل (90) يوضح النهاية العظمى والنهاية الصغرى لبعض أشكال منحنيات الدوال. ويلاحظ من الشكل أنه في الفترة S.

يكون لكل منحنى نهاية عظمى أو نهاية صغرى $f(c)$ أو كلاهما، $c \in S$.

وهذه القيم القصوى (عظمى أو صغرى) قد تحدث عند نقطتي نهاية الفترة أي عند a أو b. إذا كان $f(c)$ نهاية عظمى نقول أن f تأخذ نهاية عظمى عند c. والنقطة $(c, f(c))$ هي أعلى نقطة على المنحنى.

إذا كان $f(c)$ نهاية صغرى نقول أن f تأخذ نهايتها عظمى عند c. والنقطة $(c, f(c))$ هي أوطى نقطة على $gr(f)$. أحياناً نسمي النهايات العظمى والصغرى بالقيم القصوى.

القيمتان العظمى والصغرى لدالة f في نطاقها تسميان القيمتان العظمى والصغرى المطلقتان.

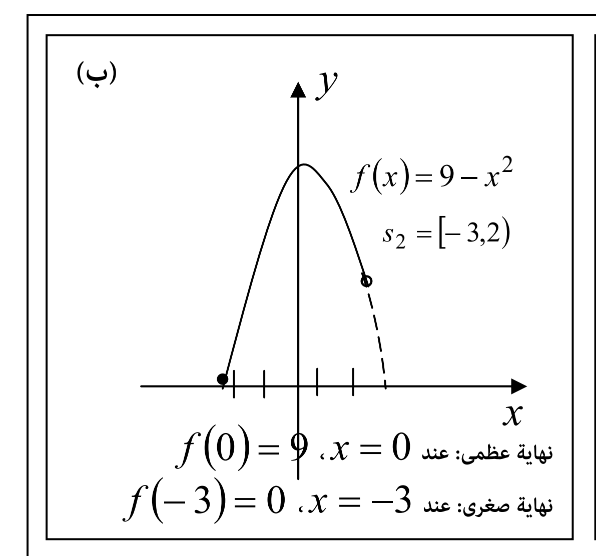


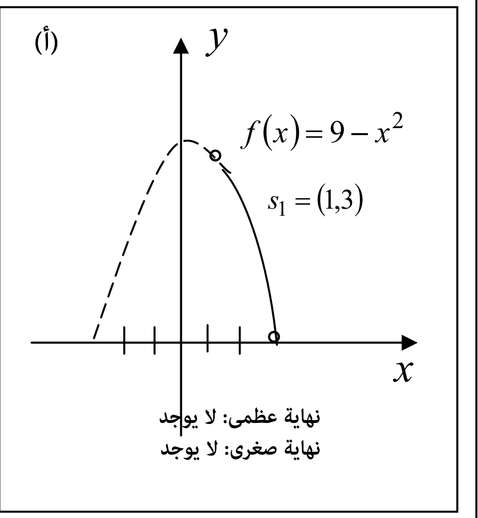
شكل (90) القيم القصوى

مثال (1):

اوجد القيمتان العظمى والصغرى للدالة f في الفترتين $S_1=(1,3)$ ، $S_2=[-3,2)$ عندما $f=9-x^2$

الحـــل





شكل (91)

شكل (91) يوضح بيان الدالة في كل من الفترتين. نجد أن في الفترة $(1,3)$ لا يوجد أي عدد c في الفترة $(1,3)$ يكون عنده $f(c)$ نهاية عظمى أو صغرى أما في شكل (91-ب) نجد أن أعلى نقطة هي $(0,9)$ ويوجد عدد $c=0$ تكون عنده الدالة $f(0)=9$ هي القيمة العظمى. كما يوجد عدد $c=-3$ يكون عنده $f(-3)=0$ هي القيمة الصغرى.

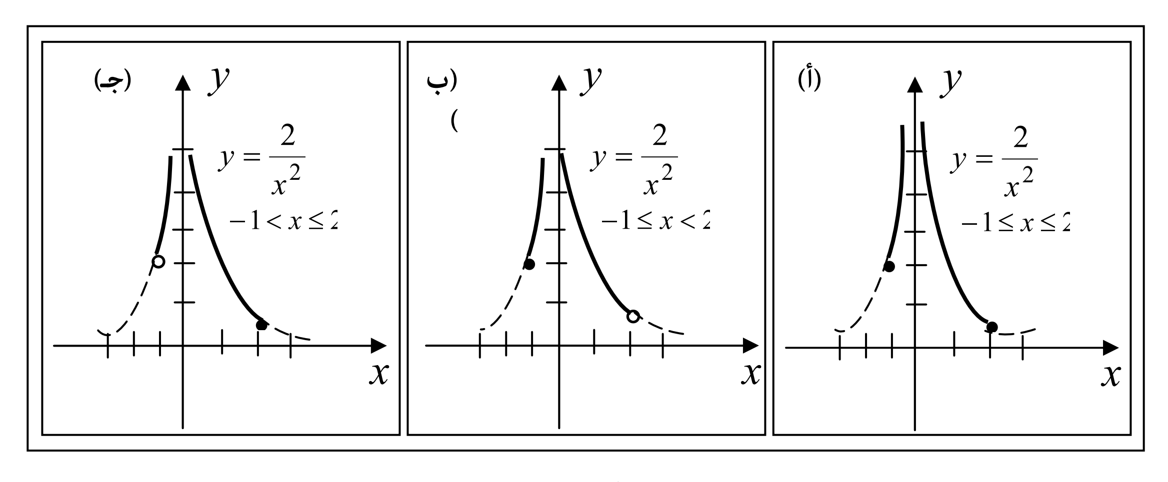
ونستطيع القول أن أي دالة f إذا كانت مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ فإنها تأخذ قيمة صغرى وقيمة عظمى على الأقل مرة واحدة في $[a,b]$. لأنه إذا كان $f(a)$ ، $f(b)$ قيمتين معرفتين فإنه حتى ولو لم يكن هناك عدد c

في (a,b) تكون عنده $f(c)$ قصوى فإن $f(a)$، $f(b)$ ستمثلان القيمة العظمى والقيمة الصغرى. ففي شكل (92) تمثيلا بيانياً للدالة $f(x)=\frac{2}{x^2}$ في الفترات $[-1,2]$، $[-1,2)$، $(-1,2]$.

ويوضح القيمة العظمى والصغرى في الفترة $[-1,2]$ هما، $f(2)=\frac{1}{2}$ صغرى، $f(-1)=2$ عظمى.

وفي الفترة $[-1,2)$ القيمة العظمى هي $f(-1)=\frac{1}{2}$ ولا يوجد صغرى.

أما في $(-1,2]$ فالقيمة الصغرى هي $f(2)=\frac{1}{2}$ ولا يوجد عظمى.



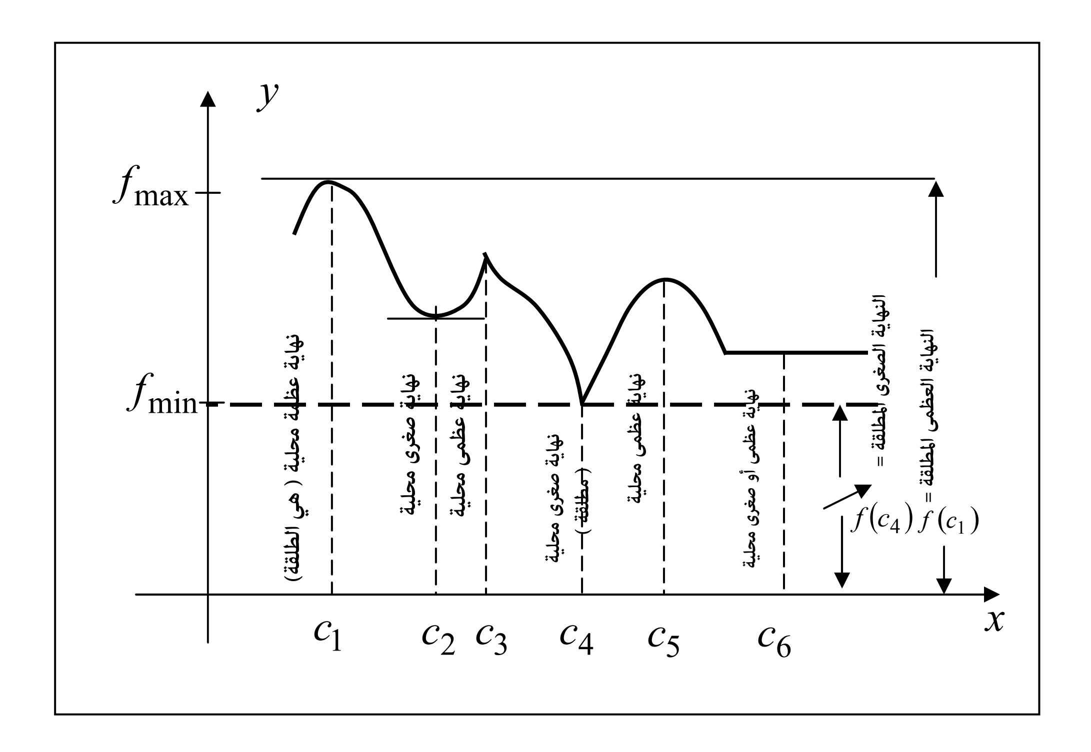
شكل (92)

تعريف: إذا كان c عدد في نطاق الدالة f،

أ) $f(c)$ تكون نهاية عظمى محلية لـ f إذا كان هناك عدد c بحيث $f(x)\le f(c)$ لكل x في (a,b) أي في نطاق f.

ب) $f(c)$ تكون نهاية صغرى محلية لـ f إذا كان هناك عدد c بحيث $f(x)\ge f(c)$ لكل x في (a,b) أي في نطاقها.

وشكل (93) يوضح النهاية العظمى المطلقة عند c_1 أي $f(c_1)$ مع وجود نهايات عظمى محلية أخرى $f(c_3)$ ، $f(c_5)$ ، $f(c_6)$. والنهاية الصغرى المطلقة عند c_4 أي $f(c_4)$ رغم وجود النهايات صغرى محلية أخرى $f(c_2)$ ، $f(c_6)$.



شكل (93)

وعندما نقول النهاية العظمى أو النهاية الصغرى دون ذكر محلية أو مطلقة إنما نقصد النهاية العظمى المطلقة $f_{\max}$ والنهاية الصغرى المطلقة $f_{\min}$. ويلاحظ أن النقط المناظرة للقيم القصوى المحلية يكون عندها إما المماس أفقياً أو أن عندها ركن (ناب). أي أن الإحداثي x عند هذه النقط إما المشتقة تساوي 0 أو غير موجودة. وهنا نورد مبرهنتين:

مبرهنة (1):

إذا كان للدالة f قيمة قصوى محلية عند c في فترة مفتوحة، فإنه إما $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

وينتج مباشرة أن،
إذا كان $f'(c)$ موجودة، $f'(c)\neq 0$ فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى.

مبرهنة (2):

إذا كانت f دالة مستمرة على فترة مغلقة $[a,b]$ ولها نهاية عظمى أو صغرى عند c في الفترة المفتوحة (a,b)، فإنه:
إما $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

تعريف: يسمى العدد c، في نطاق الدالة f، عددا حرجا لـ f
إذا كان $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

ولإيجاد القيم القصوى لدالة مستمرة f نتبع الخطوات الآتية:
1- أوجد جميع القيم الحرجة لـ f في (a,b)
2- احسب $f(c)$ لكل c أوجدتها في (1).
3- احسب القيم الحدية $f(a)$، $f(b)$.
4- النهايتان العظمى والصغرى لـ f على $[a,b]$ هما القيمتان الأكبر والأصغر لقيم الدالة المحسوبة في (2)، (3).

مثال (2):

اوجد القيمتان العظمى والصغرى للدالة f ،

$$f(x)=2x^3-54x \;\;,\;\; -4\le x\le 5$$

الحــل

نبدأ بإيجاد القيم الحرجة فنوجد $f'(x)$ ،

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2-54 \\ &= 6(x^2-9) \\ &= 6(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

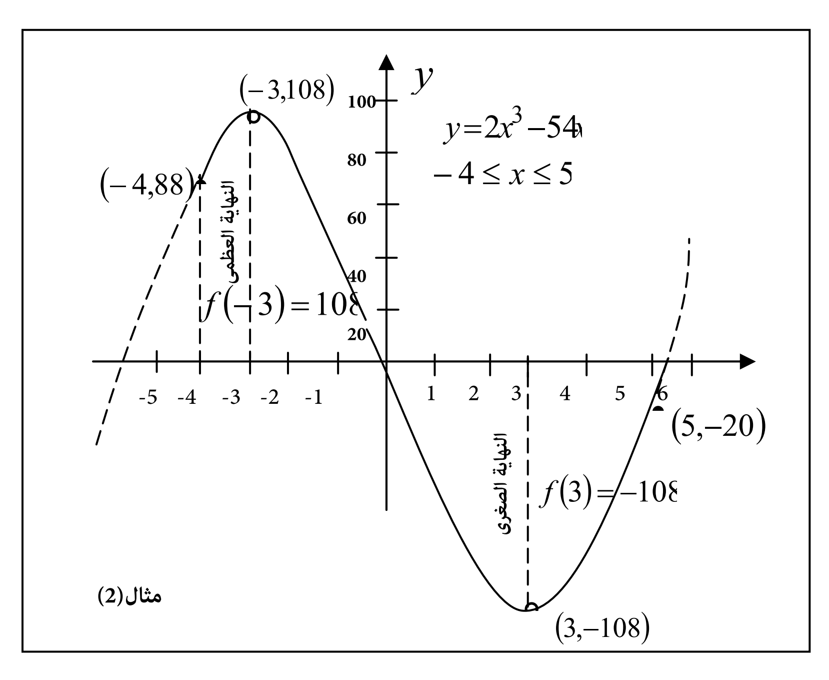
بما أن $f'(x)$ كثير حدود موجود لكل $x\in R$ فإن القيم الحرجة هي فقط التي تجعل $f'(x)=0$. أي 3- و 3.

ولما كانت f على $[-4,5]$ ينتج أن القيم العظمى والصغرى هي من بين $f(-4)$ ، $f(-3)$ ، $f(3)$ ، $f(5)$ وهم،

$$\begin{aligned} f(-4) &= 88 \\ f(-3) &= 108 \\ f(3) &= -108 \\ f(5) &= -20 \end{aligned}$$

فنجد أن النهاية العظمى هي $f(-3)=108$ عند القيمة الحرجة $x=-3$ والنهاية الصغرى هي $f(3)=-108$ عند القيمة الحرجة $x=3$.

شكل (94) يوضح $gr(f)$.



شكل (94)

مثال(3):

إذا كان، $f(x)=3+2(x-2)^{\frac{2}{3}}$ ، أوجد النهايتين العظمى والصغرى على الفترة $[0,10]$ ووضح بيان الدالة.

الحــل

بما أن $\left[(x-2)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ قيمة موجبة معرفة لجميع $x \in R$ وقيمتها 0 عند $(x=2)$. نجد أن،

$f(x)=$ 3+ (قيمة موجبة أو صفر)

أي أن $f(x) \ge 3$ وما عدا $x=2$ فإن $f(x)>3$ نستنتج أن القيمة الصغرى للدالة f هي $f(2)=3$ ومشتقة f هي،

$$f'(x)=\frac{4}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{4}{3(x-2)^{-\frac{1}{3}}} \quad , \quad x \neq 2$$

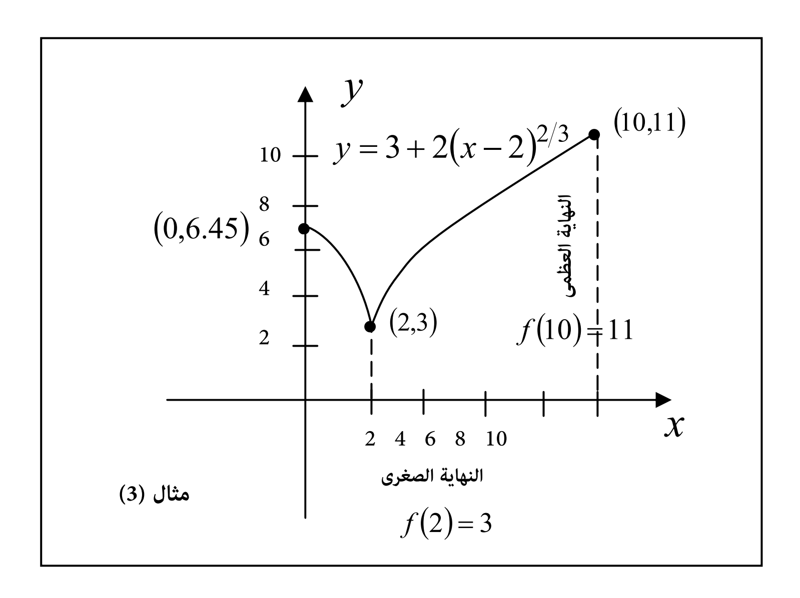
$f'(x)$ لا يمكن تساوي صفر وغير موجودة عند $x = 2$.

إذن القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 2$ في الفترة $[0,10]$.

والقيم الحدية،

$$f(0) = 3 + 2(-2)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 3 + 2\sqrt[3]{4}$$
$$\approx 6.45$$
$$f(10) = 3 + 2(10-2)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 3 + 2(8)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 11$$

$\therefore$ الدالة لها نهاية عظمى $f(10) = 11$ ونهاية صغرى $f(2) = 3$ وبيان الدالة موضح في شكل (95).



شكل (95)

ونلاحظ أن

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty$$

ولما كانت f مستمرة عند $x = 2$، ينتج أن المنحنى له ناب عند $(2,3)$.

مثال(4):

اوجد القيم الحرجة للدالة f،

$$f(x) = (x+5)^2 \sqrt[3]{x-4}$$

الحـــل

$$f'(x) = (x+5)^2 \frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}} + 2(x+5)(x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x+5)\left[\frac{(x+5)}{3(x-4)^{-\frac{2}{3}}} + 2(x-4)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \frac{(x+5)[x+5+6(x-4)]}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

ولذلك فإن $f'(x) = 0$ عند $x = -5$، $x = \frac{19}{7}$ و $f'(x)$ غير موجودة عند $x = 4$.

$\therefore f$ لها ثلاثة قيم حرجة هي 4 , $\frac{19}{7}$, -5.

مثال (5):

اوجد الأعداد الحرجة للدالة،

$f(x) = 4\sin^3 x + 3\sqrt{2}\cos^2 x \ \ , \ \ 0 \le x \le \pi$ ثم أوجد النهايتين العظمى والصغرى.

الحـــل

الدالة معرفة لجميع قيم $x \in [0, \pi]$.

$$f'(x) = 12\sin^2 x \cos x + 6\sqrt{2}\cos x(-\sin x)$$
$$f'(x) = 6\sin x \cos x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right)$$

كذلك $f'(x)$ معرفة لجميع $x \in (0, \pi)$، بقي بحث متى $f'(x)$ تساوي صفر،

$$6\sin x \cos x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0$$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $\cos x = 0$ أو $\sin x = 0$

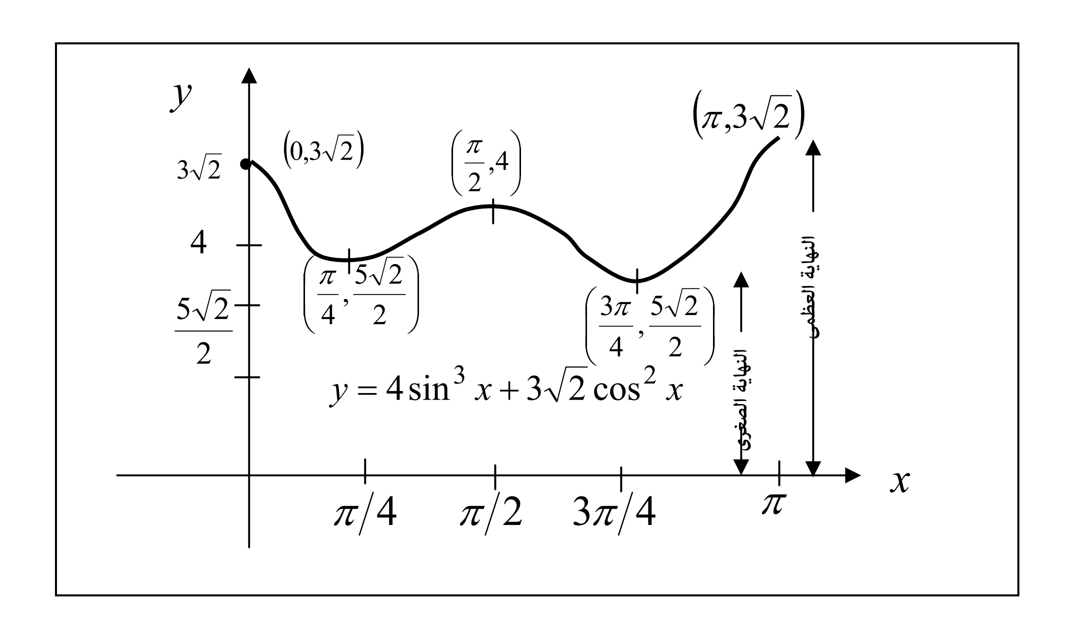
$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ أو $x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = 0, \pi$

$\therefore$ يوجد 5 قيم حرجة هي $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$

وقيم $f(x)$ المناظرة هي،

$$3\sqrt{2}, 2.5\sqrt{2}, 4, 2.5\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$$

$\therefore$ النهاية العظمى هي $f(0) = f(\pi) = 3\sqrt{2}$، والنهاية الصغرى هي $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{2}$. (شكل (96))



y
x
$3\sqrt{2}$
4
$\frac{5\sqrt{2}}{2}$
$(0,3\sqrt{2})$
$\left(\frac{\pi}{2},4\right)$
$(\pi,3\sqrt{2})$
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$
$y = 4\sin^3 x + 3\sqrt{2}\cos^2 x$
$\pi/4$
$\pi/2$
$3\pi/4$
π
النهاية الصغرى
النهاية العظمى

شكل (96)

تمارين (5-1)

من (1) إلى (4) وضح بيان f وجد القيم القصوى في كل فترة

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$

أ- $[2,5]$ ب- $[0,5)$ جـ- $(0,2)$ د- $(0,4)$

(2) $f(x)=2(x-1)^{\frac{2}{3}}-4$

أ- $[0,1)$ ب- $(-7,2)$ جـ- $(1,2]$ د- $[0,9]$

(3) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ، $x\in R$

(4) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ، $x\in R$

من (5) إلى (10) أوجد القيم القصوى للدالة f على الفترة المعطاة

(5) $f(x)=5-6x^2-2x^3$ ، $x\in[-3,1]$

(6) $-1\le x\le 3$, $f(x)=3x^2-10x+7$

(7) $-1\le x\le 8$, $f(x)=1-x^{\frac{2}{3}}$

(8) $f(x)=x^4-5x^2+4$ ، $x\in[0,2]$

(9) $f(x)=\sin^2 x-\cos x$ ، $x\in[0,\pi]$

(10) $f(x)=(2x-3)\sqrt{x^2-9}$ ، $x\in(3,\infty)$

في التمارين من (11) إلى (36) أوجد الأعداد الحرجة للدالة.

(11) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-4}$

(12) $f(t)=\dfrac{t^2}{5t+4}$

(13) $g(x)=(x-3)\sqrt{9-x^2}$

(14) $f(x)=x^2\sqrt[3]{2x-5}$

(15) $R(u)=(4u+1)\sqrt{u^2-1}$

(16) $f(x)=(2x-5)\sqrt{x^2-4}$

(17) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x-2}$

(18) $f(t)=\sqrt{t^2-64}$

(19) $f(x)=x^5-2x^3+x-12$

(20) $f(x)=x^4-32x$

(21) $f(t)=4t^3+5t^2-42t+7$

(22) $f(x)=2x^3+x^2-20x+4$

(23) $u(x)=3x+1$

(24) $T(\alpha)=4\alpha^2-3\alpha+2$

(25) $g(\theta)=2\sqrt{3}\theta+\sin 4\theta$

(26) $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

(27) $f(x)=8\cos^3 x-3\sin 2x-6x$

(28) $g(t)=\sin 2t+2\cos t$

(29) $K(r)=4\sin^3 r+3\sqrt{2}\cos^2 r$

(30) $f(\theta)=\cos^2\theta-\sin\theta$

(31) $f(x)=\sec(x^2+1)$

(32) $f(x)=\dfrac{\sec x+1}{\sec x-1}$

(33) $H(\phi)=\cot\phi+\csc\phi$

(34) $g(x)=2x+\cot x$

(35) $P(\alpha)=3\tan\alpha-4\alpha$

(36) $f(x)=x-\tan x$

(37) إذا كان $f(x)=|x|$ أثبت أن،0، هو العدد الحرج الوحيد وأن $f(0)$ هي نهاية صغرى محلية لـ f وأن بيان f ليس له مماس عند $(0,0)$.

(38) اثبت أن f ليس لها قيم قصوى محلية وأرسم بيان f. اثبت أن f مستمرة على $(0,1)$ ولكن ليس لها نهاية عظمى ولا صغرى على $(0,1)$.

أ- $f(x)=1/x^2$ ب- $f(x)=x^3+1$

(39) اوجد الأعداد الحرجة والقيم القصوى للدالة f ،

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \ 0\le x\le 1 \\ -3(x-1)^2+2(x-1)+1 & , \ 1\le x<2 \\ 3(x-2)^2-4(x-2) & , \ 2\le x<3 \\ -(x-4)^2 & , \ 3\le x\le 4 \end{cases}$$

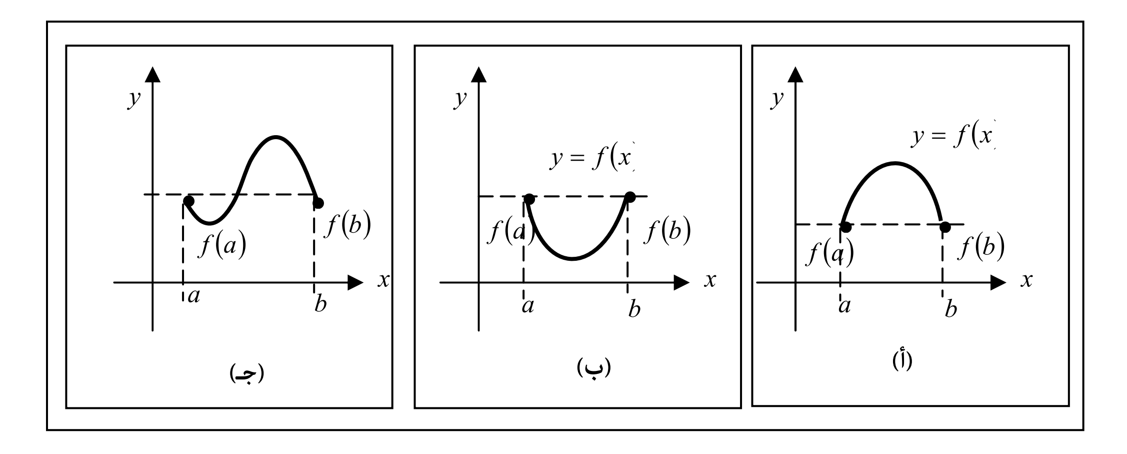
بند 5-2: مبرهنة القيمة المتوسطة The Mean Value Theorem

لمناقشة مبرهنة القيمة المتوسطة للعالم لويس لاجرانج نبدأ بمناقشة مبرهنة رول التي تعود للفرنسي ميخائيل رول في القرن السابع عشر.

مبرهنة رول: Rolle's Theorem

إذا كانت f مستمرة على فترة مغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) وكان $f(a)=f(b)$ ، فإنه يوجد على الأقل عدد واحد c في (a,b) بحيث $f'(c)=0$.

والأشكال (97 – أ، ب، جـ) توضح صحة توقع رول.



شكل (97)

البرهان: الدالة f لا يمكن إلا أن تكون واحدة من ثلاثة أنواع.

الأول : $f(x)=f(a)$ لكل x في (a,b). وعندئذ f مقدار ثابت و $f'(x)=0$ لكل x. أي لكل c في (a,b).

الثاني: $f(x) > f(a)$ لقيمة معينة x في (a,b). عندئذ تكون النهاية العظمى لـ f في $[a,b]$ اكبر من $f(a)$ أ، $f(b)$ ومن ثم يجب أن تكون عند عدد معين c في الفترة المفتوحة (a,b). ولما كان $f'(x)$ موجودة خلال الفترة (a,b) نستنتج أن $f'(c)=0$.

الثالث: $f(x) < f(a)$ لقيمة معينة x في (a,b). وفي هذه الحالة القيمة الصغرى لـ f في $[a,b]$ اصغر من $f(a)$ أ، $f(b)$ ويجب حدوثها عند عدد ما c في (a,b). كما في ثانياً، $f'(c)=0$.

انتهى البرهان.

نتيجة:

إذا كان f مستمرة على الفترة $[a,b]$، $f(a)=f(b)$ ، فإن f لها على الأقل عدد حرج واحد في الفترة المفتوحة (a,b).

البرهان:

إذا كان f' غير موجودة عند c في (a,b) فإن c هي عدد حرج. كما وأن إذا كان f' موجودة في (a,b) فإن، من مبرهنة رول، يوجد عدد حرج. (انتهى البرهان)

مثال (6):

إذا كان $f(x)=4x^2-20x+30$

اثبت أن f تحقق مبرهنة رول على الفترة $[1,4]$ وأوجد قيم c الحقيقية التي تحقق $f'(c)=0$.

الحــل (شكل 98)

$$f(1)=4-20+30=14$$

$$f(4)=4(4)^2-20(4)+30=$$
$$=64-80+30=14$$
$$f(1)=f(4)$$

بما أن f مستمرة وقابلة للتفاضل كونها كثير حدود، $f(1)=f(4)$ إذن هي تحقق فروض مبرهنة رول

شكل (98)

على $[1,4]$،

$$f'(x)=8x-20 \quad , \quad f'(x)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

إذن

$$f'\left(\frac{5}{2}\right)=0 \ , \ 1<\frac{5}{2}<4 \Rightarrow c=\frac{5}{2}$$

وبيان f هو قطع مكافئ موضح في شكل (98). وحيث أن $f'\left(\frac{5}{2}\right)=0$ ، فإن المماس أفقياً عند الرأس $\left(\frac{5}{2},5\right)$.

على الرغم من أهمية مبرهنة رول نفسها إلا أننا نعتبرها خطوة لاستعمالها في برهان وأعمدة من أهم أدوات الحسبان، وهي مبرهنة القيمة المتوسطة.

<u>مبرهنة القيمة المتوسطة</u>: (Mean value theorem)

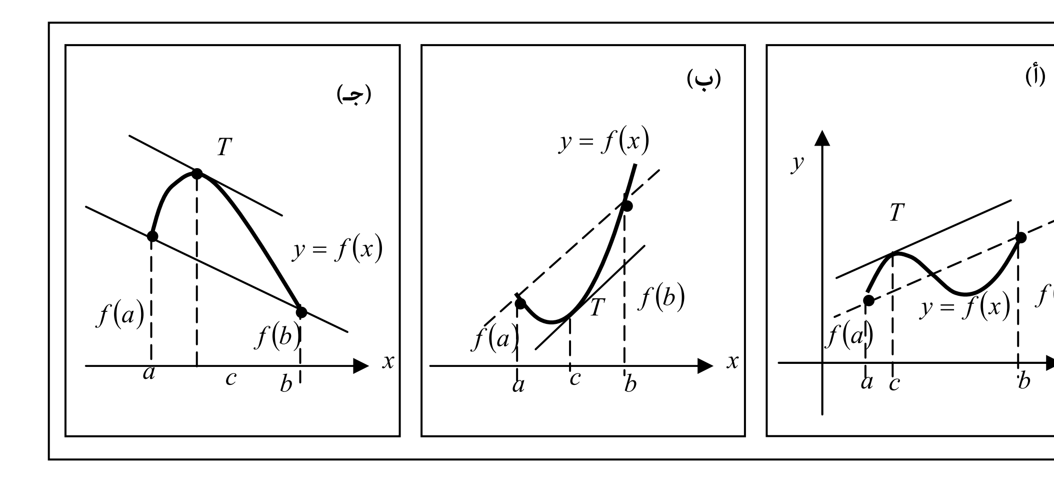
إذا كان f دالة مستمرة على فترة مغلقة $[a,b]$ وقابلة للتفاضل على الفترة المفتوحة (a,b)، فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

أو الشكل المكافئ،

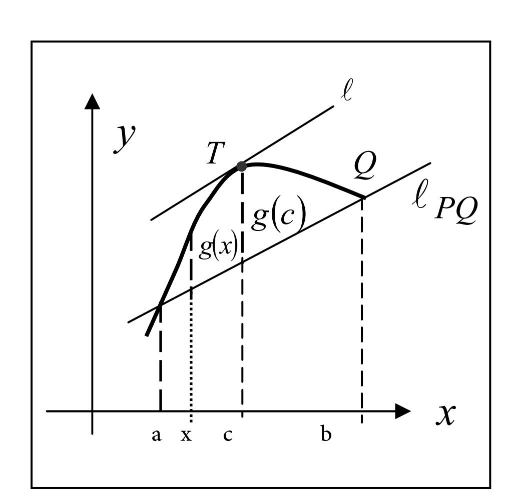
$$f(b)-f(a)=f'(c)\ (b-a)$$

شكل (99) يصور بيانياً مبرهنة القيمة المتوسطة حيث $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ هو ميل الوتر بين النقطتين $(a,f(a))$، $(b,f(b))$ والنقطة T على المنحنى هي نقطة ميل المماس عندها $(f'(c))$ يوازي الوتر المذكور.



شكل (99)

البرهان:



معادلة المستقيم الواصل من P إلى Q هي

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

ولنفرض $T(c,f(c))$ نقطة على المنحنى بحيث المماس ℓ عندها يوازي ℓ_{PQ}، فإذا كان $g(x)$ هي المسافة الرأسية من الوتر PQ إلى المنحنى f. كما هو موضح في شكل (100) فإن

شكل (100)

المسافة $g(c)$ هي قيمة قصوى محلية لـ g.

$$g(x)=f(x)-y$$

$$g(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

وبما أن $g(a)=0$، $g(b)=0$، $g(x)$ مستمرة وقابلة للتفاضل، إذن يمكن استعمال مبرهنة رول. يوجد عدد c في الفترة المفتوحة (a,b) بحيث

$$g'(c)=0$$

ولكن

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

إذن يوجد عدد c بحيث

$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

أو

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

انتهى البرهان.

مثال (7):

إذا كان $f(x)=x^2-8x$

فاثبت أن f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[1,8]$ وأوجد عدد c في $(1,8)$ يحقق نتيجة المبرهنة.

الحــل

f دالة تربيعية مستمرة وقابلة للتفاضل،

$f(8)=0$ ، $f(1)=-7$

$\therefore f$ تحقق فروض مبرهنة القيمة المتوسطة، نوجد c بحيث

$$f'(c)=\frac{f(8)-f(1)}{8-1}=\frac{0+7}{8-1}=1$$

$$f'(x)=2x-8 \Rightarrow f'(c)=2c-8$$

إذن

$$2c-8=1$$
$$2c=9$$
$$c=4.5$$

مثال (8):

إذا كان $f(x)=2x^3-15x^2+ax+b$

فاثبت أن f تحقق فروض مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[0,3]$ علماً بأن a ، b ثابتين حقيقيين.

الحــل

الدالة كثير حدود مستمر على $[0,3]$ وقابل للتفاضل على $(0,3)$

$f(3)=-81+3a+b$ ، $f(0)=b$

$$f'(x)=6x^2-30x+a$$

$$f'(c) = 6c^2 - 30c + a = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$$

$$6c^2 - 30c + a = -27 + a$$

$$6c^2 - 30c + 27 = 0$$

$$2c^2 - 10c + 9 = 0$$

$$c = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 72}}{4}$$

$$c = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{4}$$

$$c = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{5 + \sqrt{7}}{2} > 3 \ , \ \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \notin [0,3]$$

إذن

$$c = \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{2} \right)$$

مثال (9):

إذا كان $f(x) = \frac{1}{x - 2}$

فاثبت أن f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[3,5]$ وأوجد c.

الحــل

الدالة f مستمرة على $[3,5]$ لأن $x = 2$ لا تقع في الفترة. وقابلة للتفاضل على $(3,5)$.

$$f(3) = \frac{1}{3 - 2} = 1$$

$$f(5)=\frac{1}{5-2}=\frac{1}{3}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$$

إذن،

$$\frac{-1}{(c-2)^2}=\frac{\frac{1}{3}-1}{5-3}=\frac{-\frac{2}{3}}{2}=-\frac{1}{3}$$

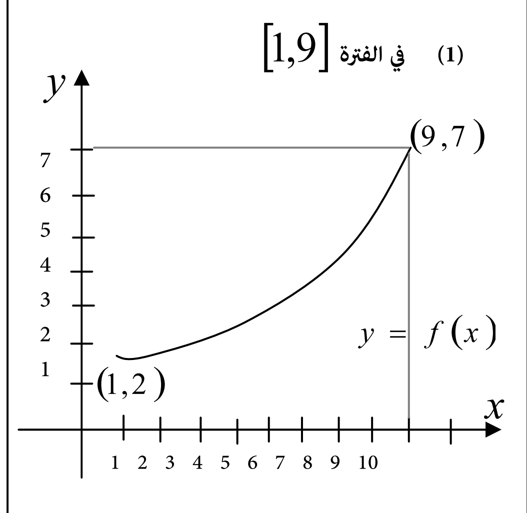
$$(c-2)^2=3$$

$$c=2\pm\sqrt{3}\quad,\ 2-\sqrt{3}\notin[3,5]$$

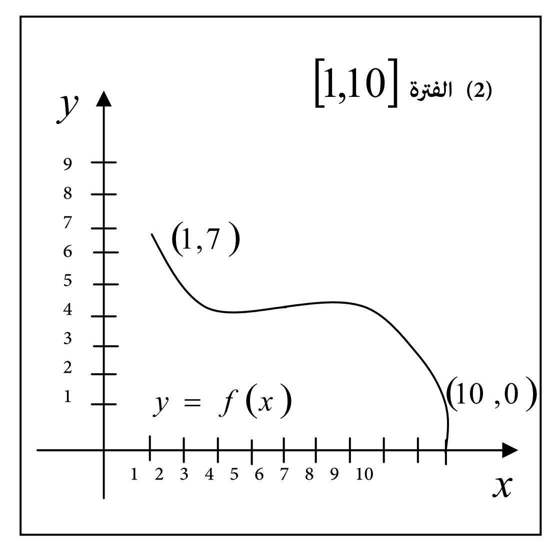
$$c=2+\sqrt{3}$$

تمارين (5-2)

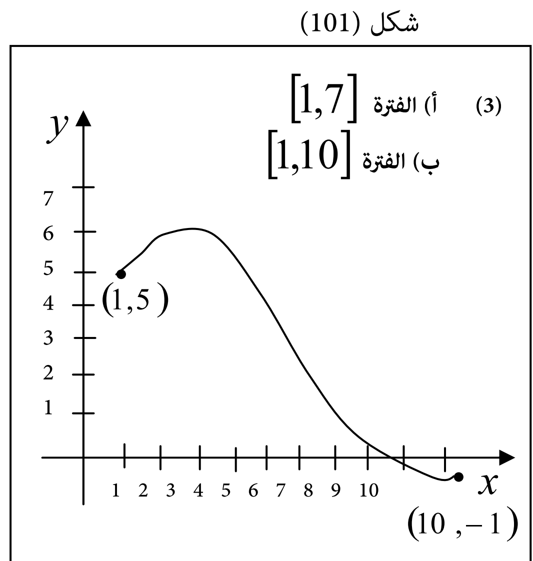
في التمارين من (1) إلى (4) أوجد قيمة c في الفترة المعطاة التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة f الموضح بيانها.



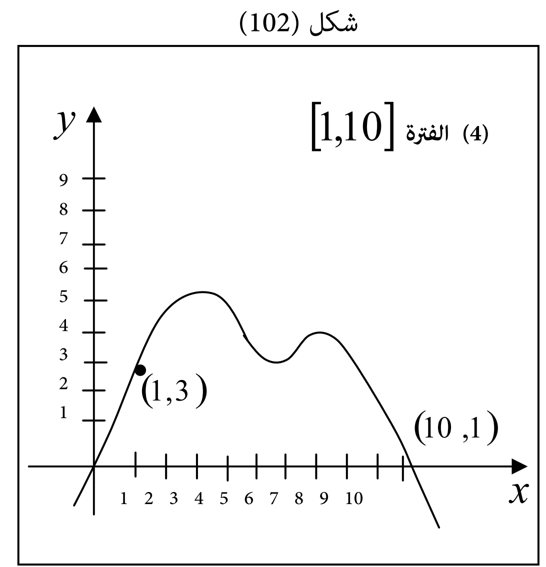
شكل (101)



شكل (102)



شكل (103)



شكل (104)

في التمارين من (5) إلى (14) أثبت أن f تحقق فروض مبرهنة رول على $[a,b]$ وأوجد الأعداد c في (a,b) بحيث $f'(c)=0$.

(5) $f(x)=4x^3-8x^2+5 \ , [0,2]$

(6) $f(x)=3x^3-12x^2+5 \ , [0,4]$

(7) $f(x)=2+7x-x^2 \ , [3,4]$

(8) $f(x)=11-12x-2x^2 \ , [-7,1]$

(9) $f(x)=x^4+4x^2+1 \ , [-3,3]$

(10) $f(x)=8x^3-2x+1 \ , \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

(11) $f(x)=\sin 2x \ , [0,\pi]$

(12) $f(x)=\csc x \ , \left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$

(13) $f(x)=\cos 2x+2\cos x \ , [0,2\pi]$

(14) $f(x)=x^2+\cos x^2 \ , \left[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

في التمارين من (15) إلى (33) أذكر ما إذا كانت f تحقق فروض مبرهنة القيمة المتوسطة على $[a,b]$ وأوجد جميع قيم $c\in(a,b)$ بحيث

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

(15) $f(x)=4x-3x^3+8 \ , [1,2]$

(16) $f(x)=5x^2-3x+11 \ , [1,3]$

(17) $f(x)=1-3x^{\frac{1}{3}} \ , [-8,-1]$

(18) $f(x)=x^3-2x^2+x+10 \ , [-1,1]$

(19) $f(x)=3x^5+5x^3+15x \ , [-1,1]$

(20) $f(x)=x+\frac{4}{x} \ , [1,4]$

(21) $f(x)=|x-4| \ , [-1,5]$

(22) $f(x)=x^{\frac{2}{3}} \ , (-1,-8)$

(23) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2} \ , [-2,3]$

(24) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2} \ , [0,2]$

(25) $f(x)=4+\sqrt{x-1} \ , [1,3]$

(26) $f(x)=(x+2)^{2/3} \ , [-1,6]$

(27) $f(x)=x^3+1 \ , [-2,4]$

(28) $f(x)=x^3+4x \ , [-3,6]$

(29) $f(x)=\sin x \ , [0,\pi/2]$

(30) $f(x)=\tan x \ , [0,\pi/4]$

(31) $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+5 & ; \ x<0 \\ x^3-4x^2+x+5 & ; \ x\geq 0 \end{cases}$ ، $[a,b]=[-1,1]$

(32) $f(x)=|x^2-8x|$ ، أ) $[a,b]=[-1,9]$ ، ب) $[a,b]=[1,8]$

(33) إذا كان $f(x)=px^n+qx+r$ ، $x\in[a,b]$ ، r ، q ، p ثوابت حقيقية، $n\in N$ ، $n>1$ أثبت أن f تحقق فروض مبرهنة القيمة لا تعتمد على r، q، p.
تحقق بعد إيجاد c أنها فعلاً تقع في الفترة (a,b).

(34) إذا كان f دالة من الدرجة الثانية معرفة على $[a,b]$، اثبت أنه يوجد عدد واحد c في (a,b) يحقق نتيجة المبرهنة هو $c=\dfrac{a+b}{2}$.

(35) بتطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة f ، $f(x)=\sqrt{1+x}$ ، أثبت أن $\sqrt{1+f}<1+\dfrac{h}{2}, \ \ h>0$.

بند 5-3: اختبار المشتقة الأولى

نورد هنا كيفية استخدام f' للتعرف على المواضع التي عندها f متزايدة وأين تكون متناقصة ومن ثم تحديد مواضع القيم القصوى المحلية.

شكل (105) يوضح بيان المعادلة $y = f(x)$ ويتضح منه أن ميل المماس موجباً في الفترات المفتوحة (c_1, c_2) و (c_3, c_4) و (c_5, c_6) أيْ $f'(x) > 0$ عندما تكون f متزايدة وبالمثل يتضح أن ميل المماس سالباً في الفترات المفتوحة

شكل (105)

(c_2, c_3) و (c_4, c_5)

أيْ عندما f متناقصة تكون $f'(x) < 0$.

وهذه النتائج ندمجها في المبرهنة الآتية.

مبرهنة :

إذا كانت f مستمرة على $[a,b]$ وقابلة للتفاضل على (a,b) فإن :

1) إذا $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f متزايدة على $[a,b]$

2) إذا $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f متناقصة على $[a,b]$.

البرهان

1) إذا كان $f'(x) > 0$ في (a,b)، x_1, x_2 عددين في $[a,b]$

بحيث $x_1 < x_2$ فمن مبرهنة القيمة المتوسطة،

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\ (x_2-x_1)$$

ولأن $x_2-x_1>0$ ، $f'(c)>0$ إذن $f(x_2)>f(x_1)$

2) البرهان بنفس الطريقة كما في (1).

انتهى البرهان.

يلاحظ أيضاً أن إذا كان $f'(x)>0$ في الفترة $(-\infty,a)$ أو (b,∞) فإن f متزايدة على $(-\infty,a]$ أو $[b,\infty)$ على الترتيب. وبالمثل متناقصة لما $f'(x)<0$.

مثال (10):

إذا كان $f(x)=4x^3+3x^2-18x+11$

أوجد الفترات التي تكون فيها f أ) متزايدة ب) متناقصة

وأرسم المنحنى $y=f(x)$.

الحـــل

$$f'(x)=12x^2+6x-18$$

أ) تكون f متزايدة عندما

$$f'(x)>0$$

$$12x^2+6x-18>0$$

$$2x^2+x-3>0$$

$$(2x+3)(x-1)>0$$

	$-\infty$ ... $-3/2$ ... 1 ... ∞
إشارة $(x-1)$	- - - - - - - - (حتى 1) + + + +
إشارة $(2x+3)$	- - - (حتى $-3/2$) + + + + + + + + + + +
إشارة $(2x+3)(x-1)$	+ + + (حتى $-3/2$) - - - - - - - - (حتى 1) + + + +
اتجاه الدالة	تزايدية ، تناقصية ، تزايدية

إذن f' موجبة على الفترتين $(1,\infty)$ ، $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$

أيْ أن منحنى $y=f(x)$ صاعدا في الفترة $(1,\infty)\cup\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$

ينتج مباشرة من (أ) أن f متناقصة في الفترة $\left(-\frac{3}{2},1\right)$

أيْ أن المنحنى $y=f(x)$ هابطا خلال الفترة $\left(-\frac{3}{2},1\right)$

لرسم المنحنى،

1) نوجد y عند القيم الحرجة $x=1$ ، $x=-\frac{3}{2}$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=31.25 \text{ ، } f(1)=0$$

2) نوجد نقط التقاطع مع المحورين ما أمكن،

أولاً : مع المحور y ، نضع $x=0$ ، نجد $y=11$

$(0,11)$ نقطة التقاطع مع المحور y .

ثانياً : مع المحور x، نضع $y = 0$

$$0 = 4x^3 + 3x^2 - 18x + 11$$

بما أن $x = 1$ تحقق هذه المعادلة إذن $x - 1$
هو احد العوامل وبالقسمة نجد أن

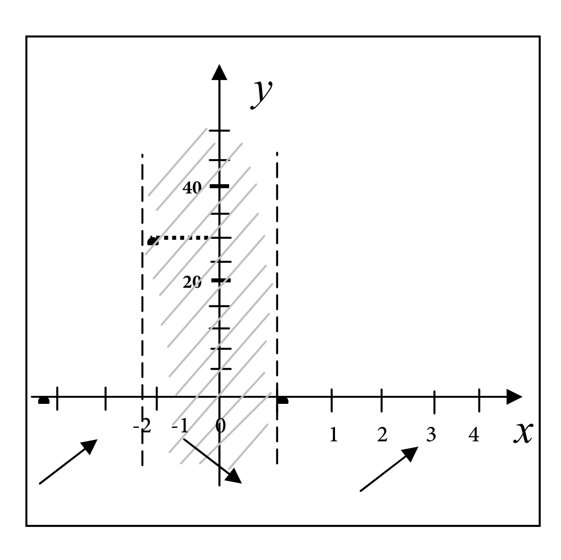
$$0 = (x-1)(4x^2 + 7x - 11)$$
$$0 = (x-1)(x-1)(4x+11)$$
$$0 = (x-1)^2(4x+11)$$

توجد نقطتي تقاطع مع المحور x هما $(1,0)$ و $\left(-\frac{11}{4},0\right)$

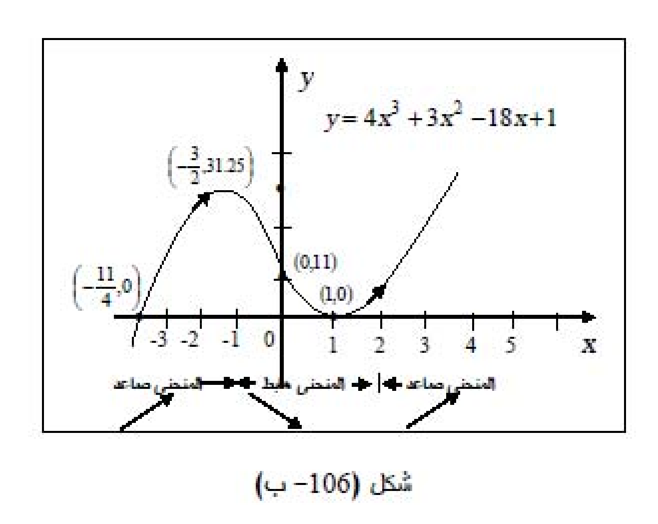
نضع جميع النقط على الرسم. شكل (106– أ)،

نقط التقاطع مع المحورين $(0,11)$، $\left(-\frac{11}{4},0\right)$، $(1,0)$ والنقط الحرجة $(1,0)$، $\left(-\frac{3}{2},31.25\right)$

ثم نستعمل معلومات صعود وهبوط المنحنى السابقة لنحصل على المنحنى كما موضح في شكل (106- ب)



شكل (106-أ)



شكل (106- ب)

ونلاحظ أن عند النقطة الحرجة $\left(-\frac{3}{2},31.25\right)$ يوجد عدد حرج -2 وقيمة عظمى محلية

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=31.25$ وأن المنحنى قبلها كان صاعدا ثم تغير بعدها إلى هابطا.

أي أن عند القيمة العظمى المحلية تتغير $f'(x)$ من موجب إلى سالب قبل وبعد العدد الحرج

وبالمثل عند العدد الحرج $x=1$ توجد نهاية صغرى للدالة $f(0)=1$.

وتتغير $f'(x)$ من سالب إلى موجب قبل وبعد $x=0$. ويمكن صياغة المبرهنة التالية:

مبرهنة:

إذا كان c عدد حرج للدالة f، f مستمرة عند c وقابلة للتفاضل على فترة مفتوحة I تحتوي c ما عدا من الممكن عند c نفسها فإن :

1) إذا f' تغيرت من موجب إلى سالب عند c فإن $f(c)$ نهاية عظمى محلية.

2) إذا f' تغيرت من سالب إلى موجب عند c فإن $f(c)$ نهاية صغرى محلية.

3) إذا $f'(x)>0$ أو $f'(x)<0$ لكل $x \in I$ ما عدا $x=c$ فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية للدالة f.

البرهان

إذا f' تغيرت من موجب إلى سالب عند c. إذن يوجد فترة مفتوحة (a,b) تحتوي على c بحيث

$$f'(x)>0 \ \ , a<x<c$$
$$f'(x)<0 \ \ , c<x<b$$

ونستطيع اختيار (a,b) بحيث f مستمرة على $[a,b]$.

وينتج من المبرهنة السابقة مباشرة أن f متزايدة على $[a,c]$ ومتناقصة على $[c,b]$

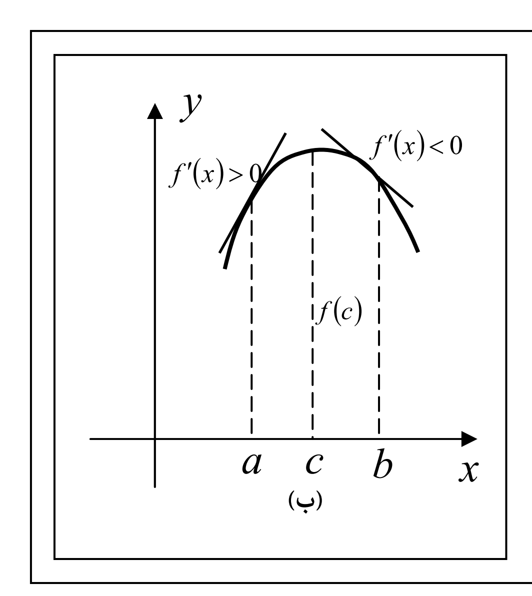
أي أن $a<x<b$, $f(x)<f(c)$ ما عدا $x=c$.

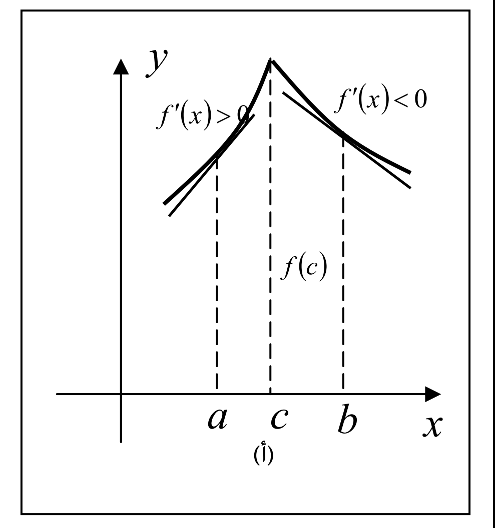
إذن $f(c)$ هي نهاية عظمى محلية للدالة f.

بذلك نكون قد أثبتنا الفقرة (1) وبالمثل يمكن إثبات (2)، (3).

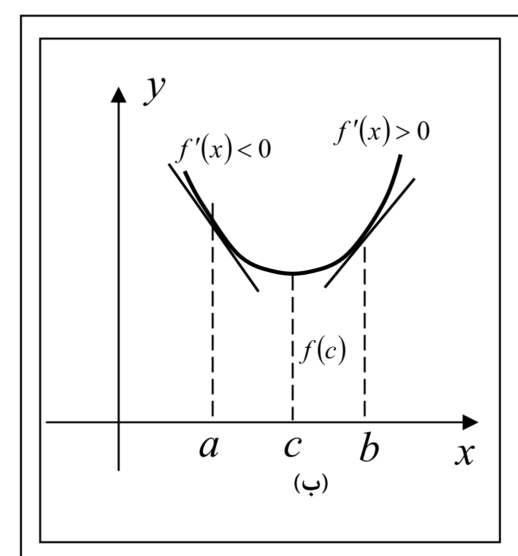
وشكل (107- أ،ب) يذكرنا بشكل بيان المنحنى بالقرب من النهاية العظمى المحلية حيث تتغير $f'(x)$ أي ميل المماس من موجب لما $x<c$ إلى سالب لما $x>c$.

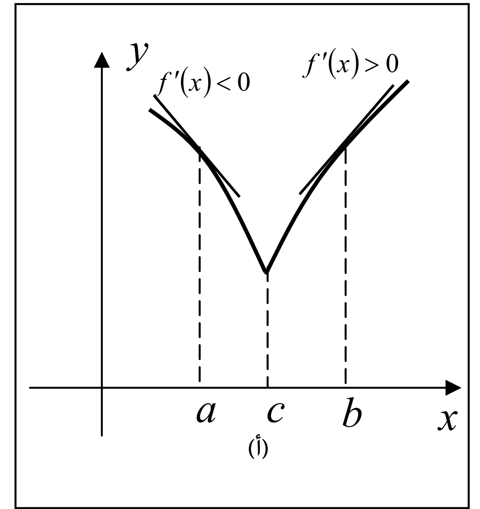
والعكس يحدث للنهاية الصغرى المحلية كما في شكل (108- أ،ب).





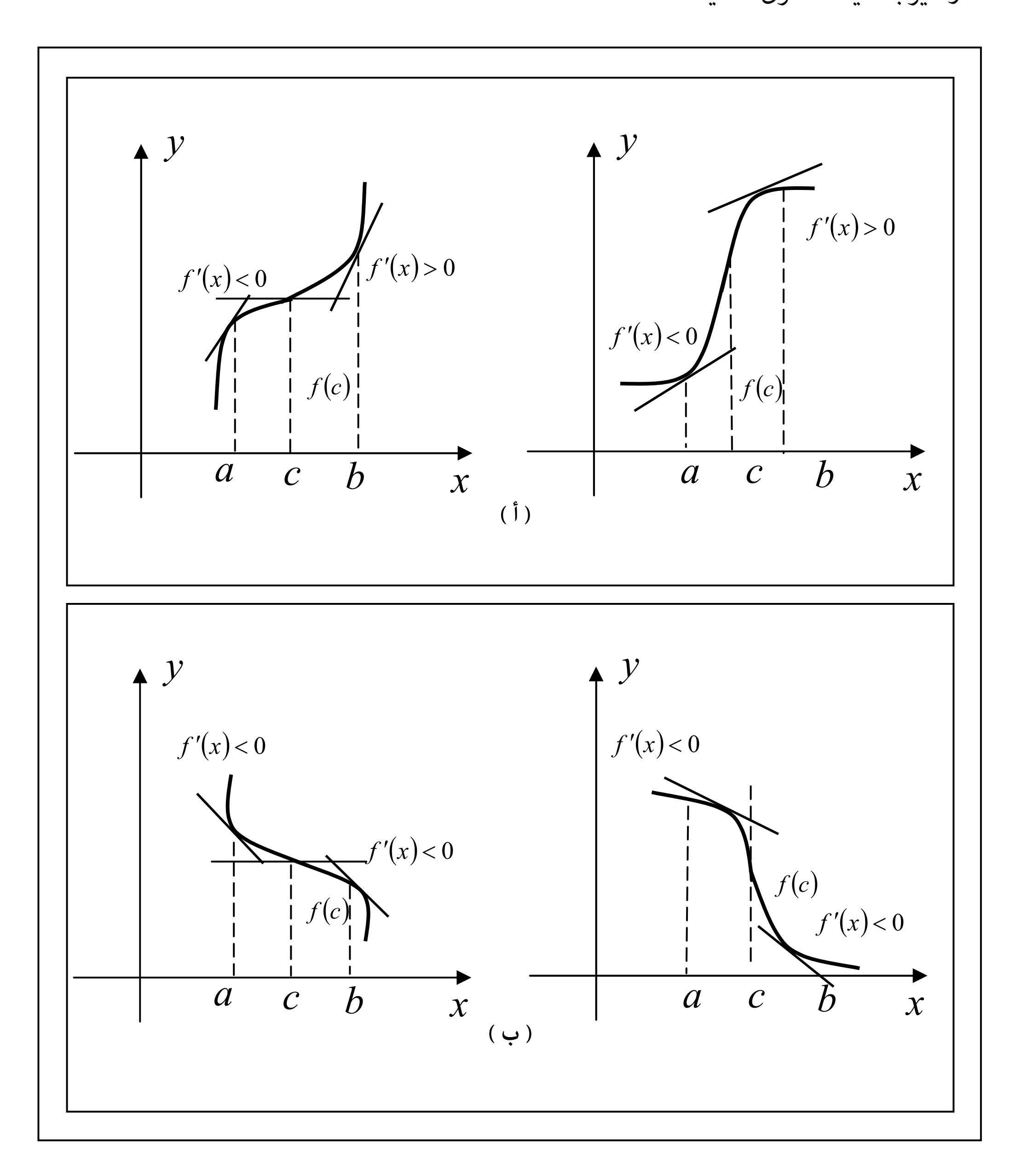
شكل (107): النهاية العظمى المحلية.





شكل (108): النهاية الصغرى المحلية.

وشكل (109- أ،ب) يوضح الفقرة الثالثة عندما لا تتغير إشارة $f(c)$ عند $x = c$ ولا يوجد قيمة قصوى محلية.



شكل (109): $f(c)$ ليست قيمة قصوى.

مثال (11):

اوجد النهاية العظمى المحلية للدالة f ووضح بيانها

أ- $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(10-x)$

ب- $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$

الحــل

أ-

$$f'(x)=x^{\frac{1}{3}}(-1)+(10-x)x^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{-3x+(10-x)}{3x^{3/2}}$$

$$=\frac{10-4x}{3x^{3/2}}$$

$$f'(x)=\frac{2(5-x)}{3x^{3/2}}$$

إذن يوجد عددين حرجين، $x=5$ ، $x=0$

لذلك نبحث إشارة $f'(x)$ في الفترات

$(-\infty,0)$, $(0,5)$, $(5,\infty)$

وبما أن f' مستمرة وليس لها أصفار في أي من الفترات الثلاث، نستطيع تعيين إشارة f'. وليس من الضرورة لحساب قيمة f' عند هذه القيم، مجرد معرفة الإشارة.

في الفترة $(-\infty,0)$ نختار $x=-1$، وفي الفترة $(0,5)$ نأخذ $x=3$، وفي الفترة $(5,\infty)$ نأخذ $x=6$ ونكون جدول كالآتي:

الفترة	$(5,\infty)$	$(0,5)$	$(-\infty,0)$
مقدار x	6	3	-1
مقدار $f'(x)$	$f'(6)=$ $\frac{-2}{3\times 6^{3/2}}<0$	$f'(3)=$ $\frac{4}{3^{5/2}}>0$	$f'(-1)=$ $4>0$
إشارة $f'(x)$	-	+	+
النتيجة	f متناقصة على $[5,\infty)$	f متزايدة على $[0,5]$	f متزايدة على $(-\infty,5]$

أي أن f' موجبة على $(-\infty,5]$ ثم متناقصة على $[5,\infty)$

أي أن الدالة لها نهاية عظمى محلية عند 5. ومقدار النهاية العظمى المحلية هو،

$$f(5)=5^{\frac{1}{3}}(10-5)=5\sqrt[3]{5}$$

وليس للدالة قيمة قصوى عند $x=0$ لأن f' لا تغير إشارتها عند 0.

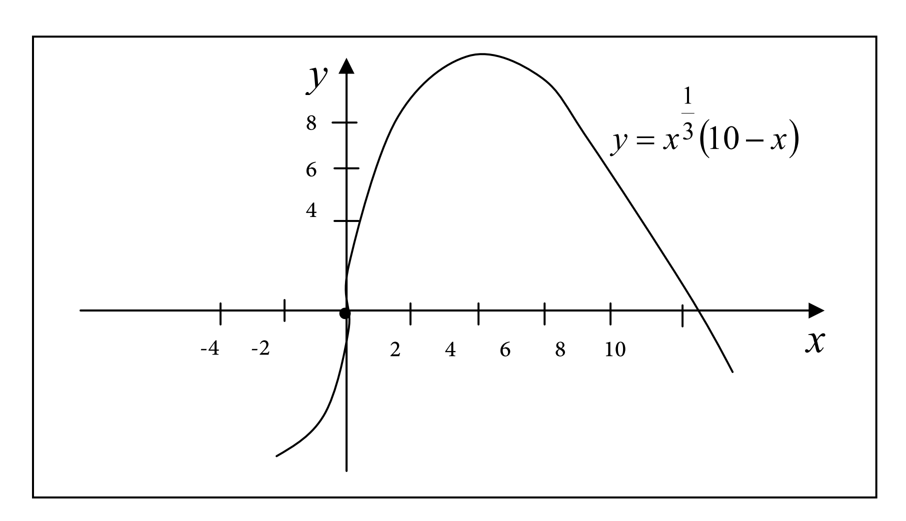
ولرسم بيان الدالة نوقع أولاً النقط المقابلة الأعداد الحرجة $(0,0)$، $(5,5\sqrt[3]{5})$. ونقط التقاطع مع المحور x عند $x=0$، $x=10$ أي $(0,0)$، $(10,0)$ مع ملاحظة أن $(0,0)$ هي نقطة تقاطع المنحنى مع محور y الوحيدة.

والمنحنى له مماس رأسي عند $x=0$، لأن

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\infty$$

بينما الدالة مستمرة عند $x=0$.

وشكل (110) يوضح بيان المنحنى



شكل (110): مثال (11) (أ)

ب-

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(2x) - (x^2 + 3)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

نجد أن $f'(x) = 0$ عند $x = 1$، $x = -3$، $f'(x) = \infty$ عند $x = -1$

$\therefore$ يوجد ثلاثة أعداد حرجة هي $x = 1$، $x = -1$، $x = -3$

والآن سنبحث إشارة $f'(x)$ في الفترات

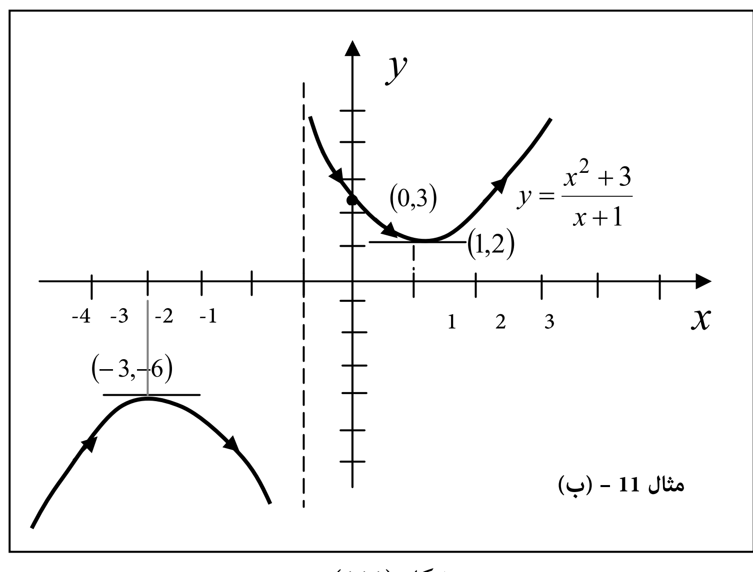
$$(-\infty, -3) \text{ , } (-3, -1) \text{ , } (-1, 1) \text{ , } (1, \infty)$$

الفترة	$(1,\infty)$	$(-1,1)$	$(-3,-1)$	$(-\infty,-3)$
x المختارة	2	0	-2	-4
$f'(x)$	$f'(2)=\frac{5}{9}>0$	$f'(0)=-3<0$	$f'(-2)=-3<0$	$f'(-4)=\frac{5}{9}>0$
إشارة $f'(x)$	+	-	-	+
النتيجة	f متزايدة على $[1,\infty)$	f متناقصة على $[-1,1]$	f متناقصة على $[-3,-1]$	f متزايدة على $(-\infty,-3]$

$\therefore$ f لها نهاية عظمى محلية عند $x=-3$ وصغرى محلية عند $x=1$ ولكن عند العدد الحرج $x=-1$ لا يوجد قيمة قصوى ولكن

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+} f'(x)=-\infty$$

$\therefore$ يوجد خط تقاربي رأسي عند $x=-1$.



شكل (111)

والمنحنى لا يقطع محور x لأن $f(x) \neq 0$ ويقطع المحور y عند $(0,3)$
$\therefore$ النهاية العظمى المطلوبة هي $f(-3) = -6$.

مثال (12):

إذا كان $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 9)$

أولاً : أوجد النهايات القصوى المحلية وارسم المنحنى.

ثانياً : ثم أوجد النهاية العظمى والنهاية الصغرى للدالة المذكورة على كل من الفترات الآتية :

أ- $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ ب- $[-1,4]$ جـ- $\left[-\frac{7}{2}, -2\right]$

الحـل

$$f'(x) = x^{2/3}(2x) + (x^2 - 9)\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$= \frac{6x^2 + 2(x^2 - 9)}{3x^{-1/3}}$$

$$= \frac{2(4x^2 - 9)}{3x^{1/3}}$$

أولاً : الأعداد الحرجة هي $x = \pm\frac{3}{2}$، إذن نبحث إشارة $f'(x)$ في الفترات $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ ، $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ، $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ، $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

الفترة	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$	$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$
x المختارة	2	1	-1	-2
$f'(x)$	$f'(2) = \frac{14}{3\sqrt[3]{2}} > 0$	$f'(1) = -\frac{10}{3} < 0$	$f'(-1) = \frac{10}{3} > 1$	$f'(-2) = -\frac{14}{3\sqrt[3]{2}} < 0$
إشارة$f'(x)$	+	-	+	-
النتيجة	f متزايدة على $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$	f متناقصة على $\left[0, \frac{3}{2}\right]$	f متزايدة على $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$	f متناقصة على $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$

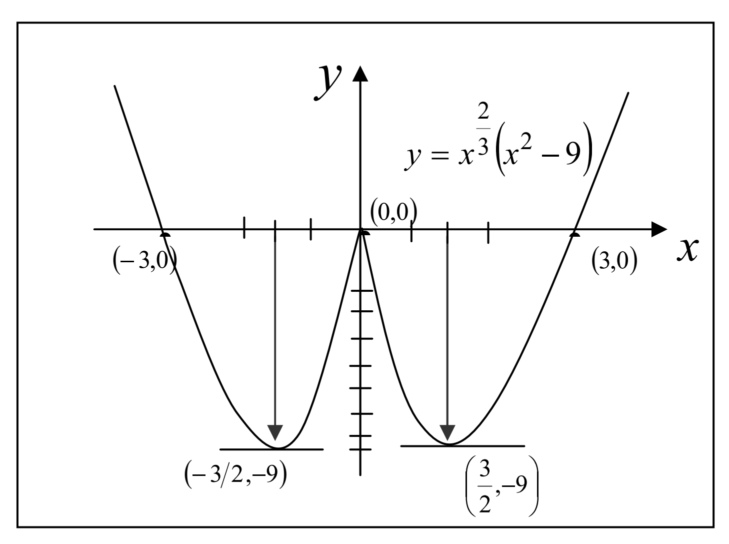
إذن f لها نهايتين صغريتين محليتين عند $x = -\frac{3}{2}$، $x = \frac{3}{2}$ يناظرها القيمتان الصغريتان المحليتان،

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}\sqrt[3]{18} \approx -9$$

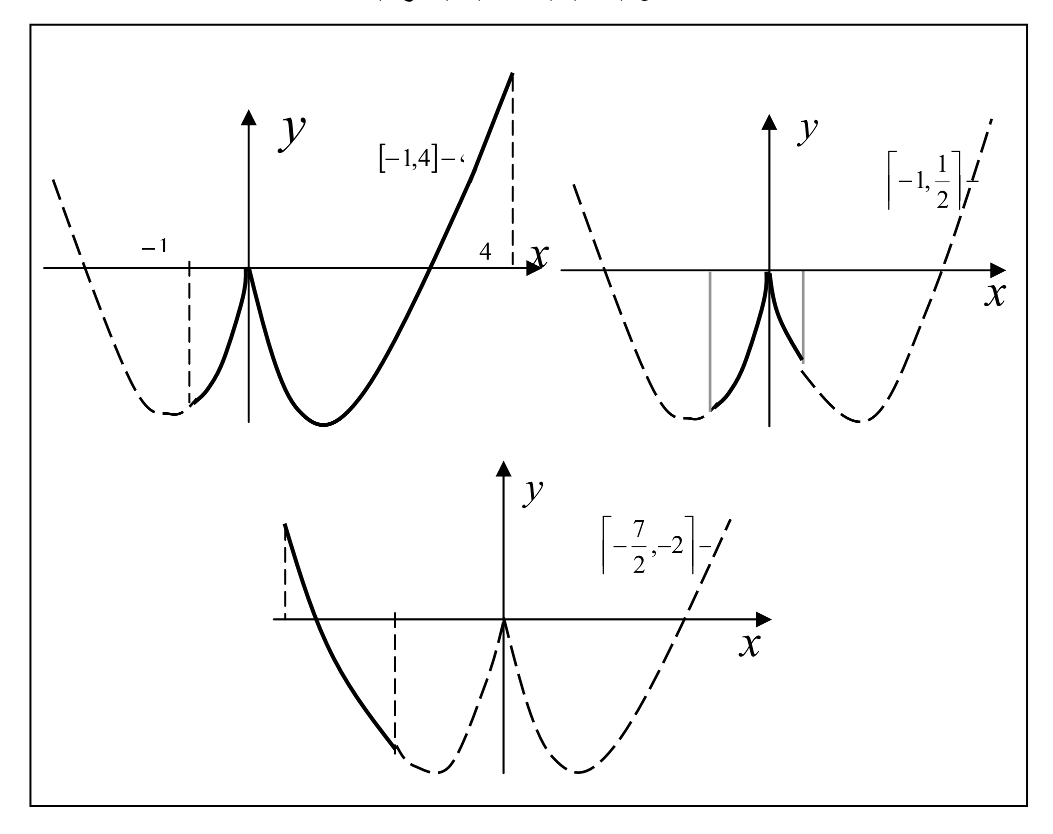
وعند العدد الحرج $x = 0$، الدالة مستمرة، $f(0) = 0$ ولكن

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$$

$\therefore$ المنحنى له ناب عند $(0,0)$ وشكل (112) يوضح بيان الدالة



شكل (112) (مثال (12): أولاً)



شكل (113) (مثال (12): ثانياً)

ثانياً: أ) في الفترة $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

$$f_{\min} = f(-1) = -8$$

$$f_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{35}{4\sqrt[3]{4}}$$

ب) الفترة $[-1,4]$

$$f_{\min} = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}\sqrt[3]{18} \approx -9$$

$$f_{\max} = f(4) = 7\sqrt[3]{16}$$

جـ) الفترة $\left[-\frac{7}{2},-2\right]$

$$f_{\min} = f(-2) = -5\sqrt[3]{4}$$

$$f_{\max} = f\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{13}{28}\sqrt[3]{98}$$

مثال (13):

أوجد النهايات القصوى المحلية وارسم المنحنى

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x$$

الحـــل

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 - 48x + 48 \\ &= 12x^2(x-1) - 48(x-1) \\ &= 12(x-1)(x^2-4) \\ &= 12(x-1)(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

إذن يوجد ثلاثة أعداد حرجة عندما $f'(x) = 0$ هي

$$x = -2,1,2$$

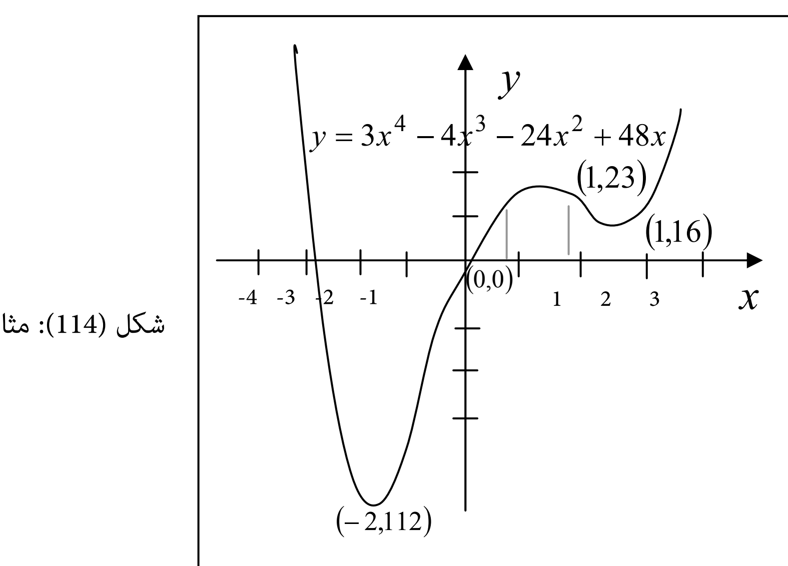
نبحث إشارة $f'(x)$ على الفترات $(-\infty,-2),\ (-2,1),\ (1,2),\ (2,\infty)$

$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$	الفترة
-3	0	$\frac{3}{2}$	3	x المختارة
$f'(-3)=$ $-240<0$	$f'(0)=$ $48>0$	$f'\left(\frac{3}{2}\right)=$ $-\frac{21}{2}<0$	$f'(3)=$ $120>0$	$f'(x)$
-	+	-	+	إشارة $f'(x)$
f متناقصة على $(-\infty,-2]$	f متزايدة على $[-2,1]$	f متناقصة على $[1,2]$	f متزايدة على $[2,\infty)$	النتيجة

$\therefore$ يوجد نهاية عظمى محلية هي $f(1)=23$

ويوجد نهايتان صغريتان محليتان هما $f(2)=16$ ، $f(-2)=-112$

ورسم بيان المنحنى مبين في شكل (114) حيث يمر بنقطة الأصل $(0,0)$ وإنما يقطع محور x في نقطة أخرى قيمة x عندها تقع في الفترة $(-3,-2)$ لأن $f(-2)<0$ ، $f(-3)>0$.



شكل (114): مثال (13)

تمارين (3-5)

في التمارين من (1) إلى (24) أوجد القيم القصوى المحلية للدالة f وفترات تزايد وتناقص الدالة ثم خطط بيان المنحنى $y = f(x)$.

(1) $f(x) = 4x^3 - 3x^4$

(2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$

(3) $f(x) = x^3 - x^2 - 40x + 8$

(4) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x + 1$

(5) $f(x) = 8x^2 - 7x - 1$

(6) $f(x) = 19 - 8x - 11x^2$

(7) $f(x) = 6x^2 - 9x + 5$

(8) $f(x) = 5 - 7x - 4x^2$

(9) $f(x) = \left(x^2 - 8x\right)^2$

(10) $f(x) = x^{2/3}(8 - x)$

(11) $f(x) = x(x - 5)^{1/3}$

(12) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^2 - 4}$

(13) $f(x) = 10x^3(x - 1)^2$

(14) $f(x) = 8 - \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$

(15) $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

(16) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 9}$

(17) $f(x) = x^{2/3}(x - 6)^2 + 4$

(18) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

(19) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$

$$f(x)=(x-2)^3(x+1)^4 \qquad (20)$$

$$f(x)=\sqrt{x^2+4} \qquad (21)$$

$$f(x)=x^2(x-5)^4 \qquad (22)$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-4}}{x^2} \qquad (23)$$

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+2}} \qquad (24)$$

في التمارين من (25) إلى (34) أوجد القيم القصوى المحلية لدالة f على الفترة المعطاة والفترات الجزئية التي فيها f متزايدة أو متناقصة مع توضيح بيان المنحنى بالرسم.

$$f(x)=\cos x+\sin x \ , \ [0,2\pi] \qquad (25)$$

$$f(x)=2\cos x+\sin 2x \ , \ [0,2\pi] \qquad (26)$$

$$f(x)=\cos x-\sin x \ , \ [0,2\pi] \qquad (27)$$

$$f(x)=2\cos x+\cos 2x \ , \ [0,2\pi] \qquad (28)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x \ , \ [0,2\pi] \qquad (29)$$

$$f(x)=\sec\left(\frac{x}{2}\right) \ , \ \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad (30)$$

$$f(x)=x+2\cos x \ , \ [0,2\pi] \qquad (31)$$

$$f(x)=\cot^2 x+2\cot x \ , \ \left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right] \qquad (32)$$

$$f(x)=2\tan x-\tan^2 x \ , \ \left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right] \qquad (33)$$

$$f(x)=\tan x-2\sec x \ , \ \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \qquad (34)$$

في التمارين من (35) إلى (39) ارسم بيان الدالة f التي تحقق الشروط المعطاة لك.

(35) $f(3)=5$ ، $f(5)=0$ ، غير معرفة $f'(5)$ ، $f'(3)=0$
$f'(x)>0$ إذا كان $x<3$ أو $x>5$ ولكن $f'(x)<0$ عندما $3<x<5$

(36) $f(0)=3$ ، $f(-2)=f(2)=-4$ ، $f'(0)$ غير معرفة ،
$f'(-2)=f'(2)=0$ ، $f'(x)>0$ عندما $x>2$ أو $-2<x<0$
، $f'(x)<0$ عندما $x<-2$ أو $0<x<2$.

(37) $f(a)=a$ ، $f'(a)=0$ عندما $a=0,\pm1,\pm2,\pm3$ ، $f'(x)>0$ لجميع قيم x.

(38) $f(0)=0$ ، $f(-5)=4$ ، $f(5)=-4$ ،
$f'(-5)=f'(0)=f'(5)=0$
$f'(x)>0$ لما $|x|>5$ ، $f'(x)<0$ لما $0<|x|<5$.

(39) $f(0)=3$ ، $f(-2)=f(2)=-4$ ،
$f'(-2)=f'(0)=f'(2)=0$
$f'(x)>0$ لما $x>2$ أو $-2<x<0$ ،
$f'(x)<0$ لما $x<-2$ أو $0<x<2$.

بند 4-5: اختبار المشتقة الثانية (والتقعر)

درسنا في بند 4-3 كيفية استعمال إشارة f' لمعرفة فترات تزايد أو تناقص f .

أما في هذا البند فسوف نستخدم إشارة f'' لهذا الغرض ونورد تعريف التقعر وفترات تقعر المنحنى لأعلى أو لأسفل ونقطة حرجة جديدة تسمى نقطة الانقلاب.

تعريف: (التقعر)

إذا كانت f قابلة للتفاضل على فترة مفتوحة I .

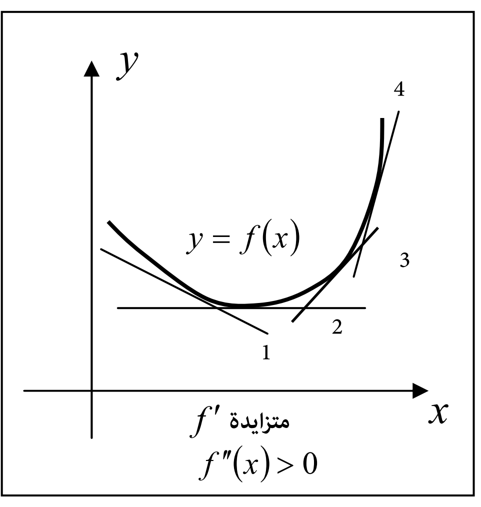
فإن بيان f يكون :

أ- مقعر لأعلى على I إذا f' متزايدة على I .

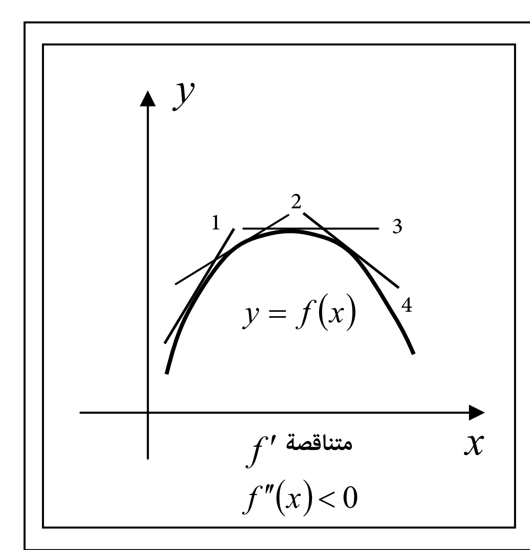
ب- مقعر لأسفل على I إذا f' متناقصة على I .

ففي شكل (115) منحنى مقعر لأعلى وميل المماس، f'، يتزايد من قيمة إلى صفر عند النهاية الصغرى إلى قيمة موجبة. أيْ أن معدل تغير f' بالنسبة إلى x موجباً، أيْ $f''(x) > 0$.

وفي شكل (116) منحنى مقعر لأسفل ونرى ميل المماس، f'، يتناقص من قيمة موجبة إلى صفر عند النهاية الصغرى إلى قيمة سالبة. أيْ أن معدل تغير f' بالنسبة إلى x يكون سالباً ، أيْ $f''(x) < 0$



شكل (115)



شكل (116)

ومن ثم نورد الاختبار الآتي .

اختبار التقعر

إذا كانت f'' قابلة للتفاضل على فترة مفتوحة I .

فإن بيان f يكون :

أ- مقعر لأعلى على I عندما $f''(x) > 0$ على I .

ب- مقعر لأسفل على I عندما $f''(x) > 0$ على I .

أما النقطة التي يتغير عندها بيان f من مقعر لأعلى إلى مقعر لأسفل أو العكس فتسمى نقطة انقلاب " Point of In flection "

ويبنى على ذلك التعريف الدقيق الآتي .

تعريف : (نقطة الانقلاب)

تسمى النقطة $(c, f(c))$، على $gr \ f$ ، نقطة انقلاب إذا تحقق الشرطان الآتيان .

أ- f مستمرة عند c.

ب- يوجد فترة مفتوحة (a,b) تحتوى c بحيث يكون المنحنى مقعر لأعلى على (a,c) ولأسفل على (c,b) أو العكس .

إذا كانت f'' بالإضافة إلى استمرارية f ، مستمرة هي الأخرى عند c. فإن $f''(c) = 0$ عند نقطة الانقلاب ولكن يجب أن يبقى بالذهن أنه من الممكن أن تكون، $f''(c)$ غير موجودة عند نقطة انقلاب. ولذلك فلإيجاد نقطة الانقلاب، نبدأ بإيجاد أصفار f'' وكذلك الأعداد التي عندها f'' غير موجودة. ثم نختبر جميع هذه الأعداد لتعيين ما إذا كانت هي نقط انقلاب أم لا.

اختبار المشتقة الثانية

إذا كانت f قابلة للتفاضل على فترة مفتوحة تحتوى c ،

وكان $f'(c)=0$ فإن :

أ) إذا كان ، $f''(x)<0$ فإن $f(c)$ نهاية عظمى محلية .

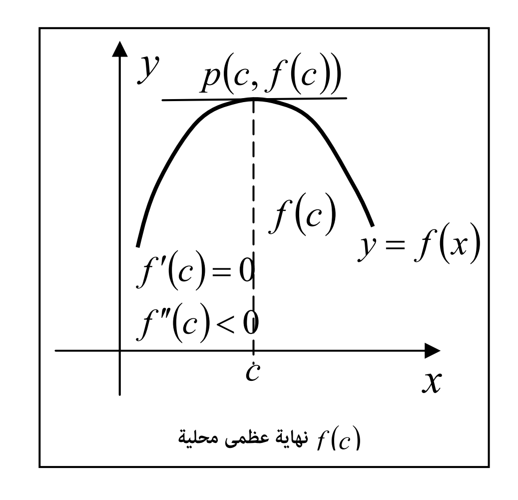
ب) إذا كان ، $f''(x)>0$ فإن $f(c)$ نهاية صغرى محلية .

جـ) إذا كان ، $f''(x)=0$ يفشل اختبار المشتقة الثانية ويجب العودة لاختبار المشتقة الأولى.

البرهان :

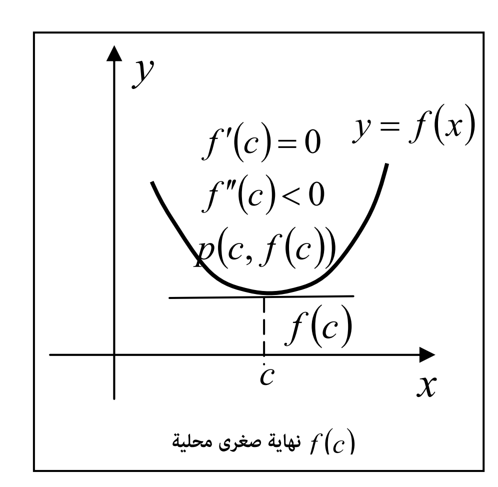
أ) فإذا كان $f'(c)=0$ يكون ميل المماس عند $(c, f(c))$ أفقياً ، فإذا كان بالإضافة لذلك $f''(c)=0$ فإن المنحنى يكون مقعر لأسفل ولذلك يكون هناك فترة مفتوحة (a,b) تحتوي c بحيث يقع المنحنى بأكمله أسفل المماسات وينتج أن $f(c)$ هي نهاية عظمى محلية. وشكل (117) يوضح ذلك.

بالمثل يمكن إثبات (ب) و (جـ) وشكل (118) يوضح الحالة (ب).



$f(c)$ نهاية عظمى محلية

شكل (117)



$f(c)$ نهاية صغرى محلية

شكل (118)

مثال (14)

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة f ووضح بيانها بالرسم .

$f(x)=2(\sin x-\sin^2 x)+1$ على الفترة $[0,2\pi]$

الحل

$$f'(x)=2(\cos x-2\sin x-\cos x)=2\cos x(1-2\sin x)$$

$$f''(x)=2(-\sin x)(1-2\sin x)+2\cos x(-2\cos x)$$

$$=2\left[-\sin x+2\sin^2 x-2\cos^2 x\right]$$

الأعداد الحرجة لـ f هي قيم x عندما $f'(x)=0$ ،

$$2\cos x(-2\sin x)=0$$

$$\cos x=0 \quad , \quad \sin x=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{2} \ ,3\frac{\pi}{2} \qquad , \quad x=\frac{\pi}{6} \ ,\frac{5\pi}{6}$$

$\therefore$ الأعداد الحرجة هي $\frac{3\pi}{6}\ ,\frac{\pi}{2}\ ,\frac{5\pi}{6}\ ,\ x=\frac{\pi}{6}\ ,$

وقيم $f''(x)$ عند هذه النقط هي

$$f''\left(\frac{3\pi}{6}\right)=6 \ f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2 \ , \ f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-3 \ , \ f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3 \ ,$$

ومن اختبار المشتقة الثانية نجد أن لدينا

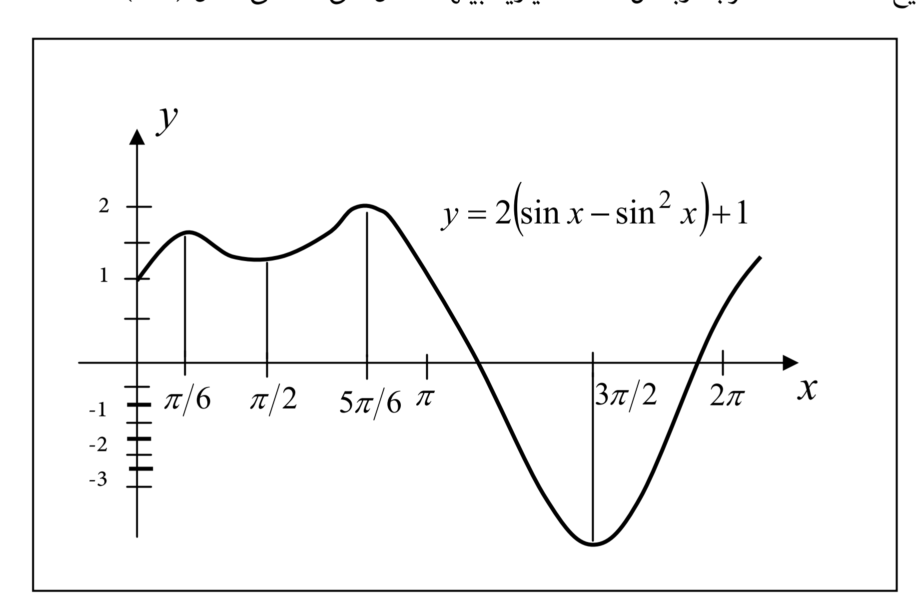
نهاية عظمى محلية: $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3/2$

نهاية عظمى محلية: $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3/2$

نهاية صغرى محلية: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

نهاية صغرى محلية : $f(3\pi/2)=-3$

بتوقيع هذه النقط الحرجة وبعض نقط اختيارية بينها نحصل على المنحنى شكل (119) .



شكل (119) : مثال (14)

مثال (15)

إذا كانت $f(x) = 2x^{1/3} + x^{4/3}$

أ- أوجد النهايات العظمى والصغرى وفترات التقعر المختلفة .

ب- أوجد نقط الانقلاب .

جـ- ارسم بيان الدالة f .

الحـــل

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \; \frac{(1+2x)}{x^{2/3}}$$

$$f''(x)=-\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{4}{9}\ \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{5/3}}$$

من $f'(x)$ نجد أن هناك عددان حرجان

$$x=\left(-\frac{1}{2}\right)\ ,\ \ x=0$$

،

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{9}\ \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\left(\frac{-1}{2}\right)^{5/3}}$$

$$=\frac{4}{9}\ \frac{-\frac{-1}{2^{1/3}}-1}{-\frac{-1}{2^{5/3}}}=$$ كمية موجبة

، غير موجودة $=f''(0)$

إذن : عند $x=-\frac{1}{2}$ يوجد نهاية صغرى محلية هي

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

، عند $x=0$ يفشل اختبار المشتقة الثانية ، سنطبق اختبار المشتقة الأولى. باختيار

$x=-\frac{1}{4}$ في الفترة $\left(-\frac{1}{2},0\right)$، $x=1$ في الفترة $(0,\infty)$ نجد أن

موجبة $f'(1)$ ، موجبة $=f'\left(-\frac{1}{4}\right)$

إذن عند $x = 0$ لا يوجد قيم قصوى وإنما $f'(0) = \infty$

ولبحث التقعر ندرس إشارة $f''(x)$ في الفترات $(0, \infty)$ و $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ و $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

فنجد باختبار قيم اختيارية لـ x في الفترات الثلاثة

مثل $x = -1$ في $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ، نجد

$$f''(-1) = \text{موجبة}$$

والمنحنى مقعر لأعلى في $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

، $x = -\frac{1}{4}$ في $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ، نجد

$$f''\left(-\frac{1}{4}\right) = \text{موجبة}$$

والمنحنى مقعر لأعلى في $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

، $x = 1/2$ في $(0,1)$ ، نجد أن

$$f''(1/2) = \text{سالبة}$$

والمنحنى مقعر لأسفل في $(0,1)$

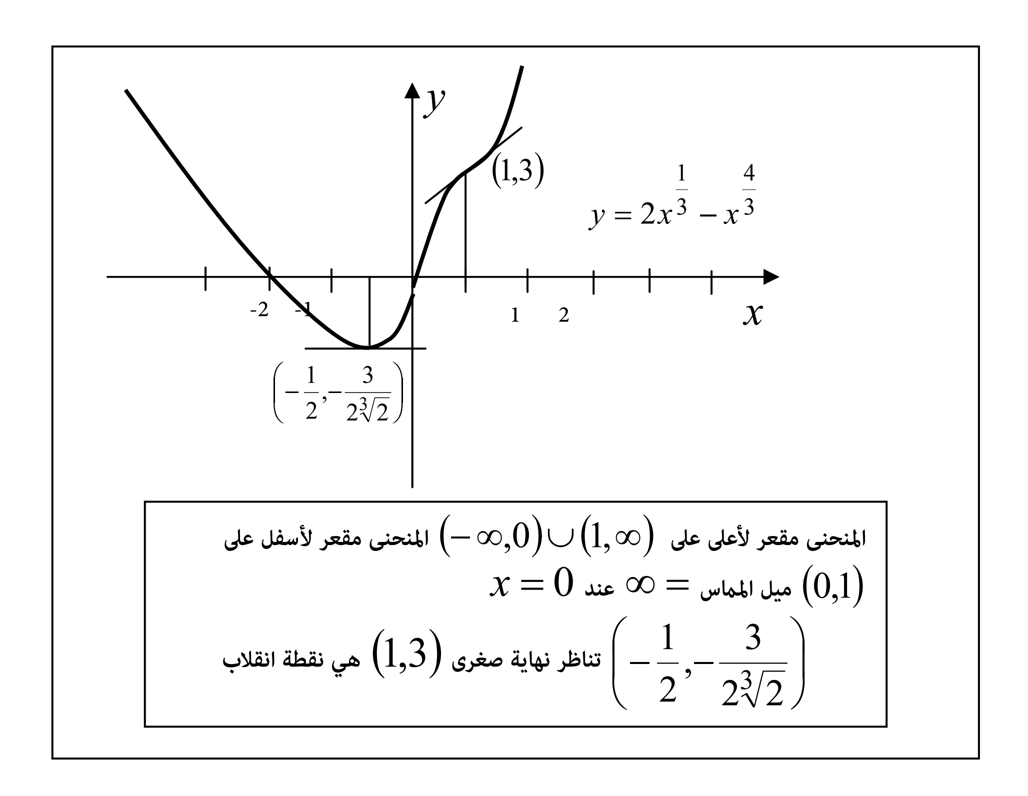
وللمنحنى نقط انقلاب عند

$$f''(x) = 0$$

أيْ $x^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$

$$x = 1$$

$\therefore$ يوجد نقط انقلاب $(1,3)$ بتقعر المنحنى بعدها لأعلى.



شكل (120) : مثال (15)

مثال (16)

كرر مثال (15) للدالة $f(x)=5x^{2/3}+x^{5/3}$

الحل

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{5}{3}\ \frac{(2+x)}{x^{1/3}}$$

$$f''(x)=-\frac{10}{9}x^{-4/3}+\frac{10}{9}x^{-1/3}$$

$$=\frac{10}{5}\ \frac{(x-1)}{x^{1/3}}$$

من $f'(x)$ نجد أن الأعداد الحرجة هي -2 ، 0

عند $x=-2$ $f''(-2)=\dfrac{-10}{3(-2)^{4/3}}$ أيْ ، سالب $=f''(-2)$

يوجد نهاية عظمى محلية هي $f(-2)=3\times 2^{\frac{2}{3}}\approx 4.8$

عند $x=0$ $f''(0)$ غير موجودة ، يفشل اختبار المشتقة الثانية . نلجأ لاختبار المشتقة الأولى حيث نبحث إشارة $f'(x)$ قبيل وبعيد $x=0$.

$$f'(-1)=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{-1}\right)=-\frac{5}{3}=\text{سالب}$$

$$f'(1)=\frac{5}{3}\left(\frac{3}{1}\right)=5=\text{موجب}$$

إذن يوجد نهاية صغرى محلية عند $x=0$ هي

$f(0)=0$

وميل المماس عند $x=0$ ، نجد

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\text{سالب}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\text{موجب}$$

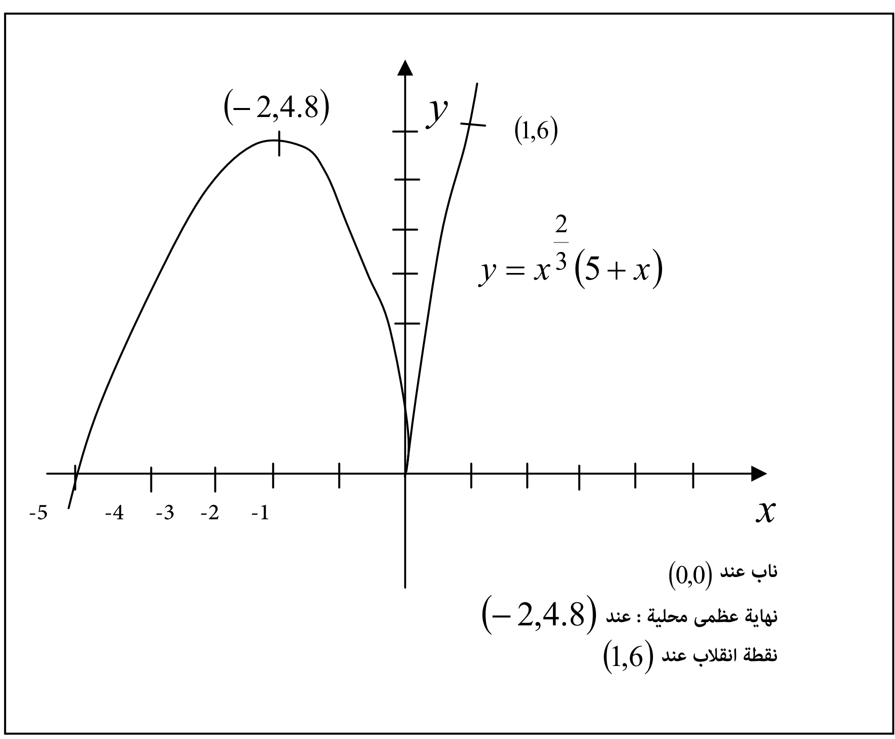
أيْ أن المنحنى له ناب عند $x=0$ لان $f(0)=0$ موجودة ولتعيين التقعر، نلاحظ أن يوجد عند $f''(x)=0$ نقطة انقلاب ، أيْ عند $x=1$ ، $y=6$

وفي الفترة $(-\infty,0)$ ، سالب $=f''(-1)$ ، المنحنى مقعر لأسفل

، في الفترة $(0,1)$ ، سالب $=f''\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، المنحنى مقعر لأسفل

، في الفترة $(1,\infty)$ ، موجب $=f''(2)$ ، المنحنى مقعر لأعلى

وبيان الدالة f موضح في شكل (121).



شكل (121) : مثال 16

تمارين (5-4)

في التمارين من (1) إلى (33) أوجد القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الثانية إذا كان ممكنا . عين فترات التقعر لأعلى والتقعر لأسفل وأوجد نقط الانقلاب . ارسم بيان الدالة .

(1) $f(x)=x^3+10x^2+25x+1$

(2) $f(x)=2x^6-6x^4$

(3) $f(x)=x^{1/3}-1$

(4) $f(x)=(x^2-1)^2$

(5) $f(x)=8x^2-2x^4$

(6) $f(x)=3x^4-4x^3+2$

(7) $f(x)=15x^5-25x^3$

(8) $f(x)=2-x^{2/3}$

(9) $f(x)=x^4-4x^3+8$

(10) $f(x)=x^3-2x^2+x$

(11) $f(x)=x^{2/3}(3x+10)$

(12) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

(13) $f(x)=x^2(3x-5)^{1/3}$

(14) $f(x)=x\sqrt[3]{3x+2}$

(15) $f(x)=8\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^4}$

(16) $f(x)=6\sqrt{x}+\sqrt{x^3}$

(17) $f(x)=x^2\sqrt{16-x^2}$

(18) $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$

في التمارين (19) حتى (24) الدوال معرفة على الفترة $[0,2\pi]$.

(19) $f(x)=\cos x+\sin x$

(20) $f(x)=\cos x-\sin x$

(21) $f(x)=\frac{1}{2}(1-2\sin x)$

(22) $f(x)=\cos x(1+\sin x)$

(23) $f(x)=2x+4\cos 2x$

(24) $f(x)=2\cos x+\cos 2x$

(25) $f(x)=2\tan x+\tan^2 x$

(26) $f(x)=\sec x-\tan x$

(27) $f(x)=\csc\frac{x}{2} \quad ,\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

(28) $f(x)=\cot^2 x+2\cot x \quad ;\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

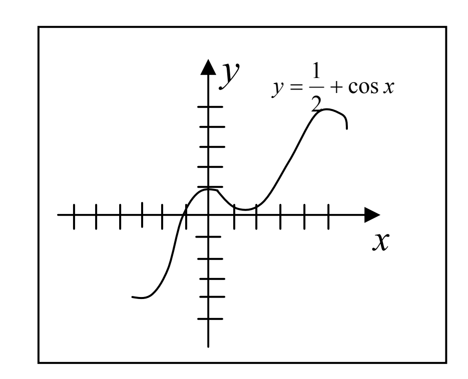
(29) $f(x)=2\tan x-\tan^2 x \quad ;\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

(30) $f(x)=\tan x-2\sec x \quad ;\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

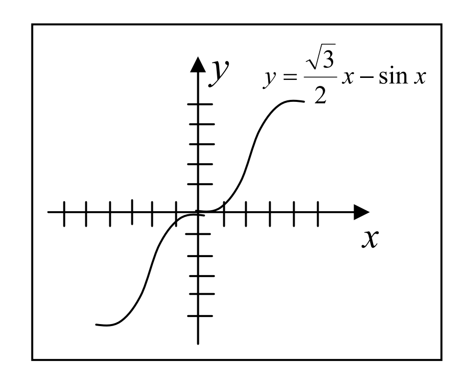
(31) $f(x)=\frac{2x^3-3x^2}{(2x-1)^3}$

(32) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$

(33) منحنى المعادلة $y=\frac{1}{2}x+\cos x$ موضحة في شكل (122)
في الفترة $-2\pi \le x \le 2\pi$ أوجد القيم القصوى المحلية .



شكل (122) تمرين (33)



شكل (123) : تمرين (34)

(34) منحنى المعادلة $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sin x$ موضح في شكل (123). في الفترة $[-2\pi,2\pi]$ أوجد، باستعمال اختبار المشتقة الثانية، القيم القصوى المحلية .

(35) عين نقط الانقلاب لبيان f ومن ثم فترات التقعر لأعلى ولأسفل

أ- $f(x)=(x-1)^2\sqrt{9-x^2}$

ب- $f(x)=10x^9-9x^{10}$

جـ- $f(x)=5(x^5+x^3)+9x$

(36) أوجد القيم القصوى ونقط الانقلاب.

$f(x)=\sin(x^2-7x+3)$ و $[0,6]$

بند 5-5 رسم المنحنيات

إن تخطيط بيان دالة f ، أي منحنى المعادلة $y = f(x)$ يوضح خواص هذه الدالة التي قد تكون غير واضحة ويمدنا بطريقة سهلة نرى بها سلوك الدالة كيفيا مثل التقعر والقيم القصوى المحلية ومناطق تزايد أو تناقص الدالة. وقد شرحنا في البنود السابقة أفكار عديدة مختلفة لتخطيط بيان دالة.

وسوف نلخص هنا هذه الأفكار ونعرف نقط إضافية أخرى.

فنبلور ذلك في مجموعة من الإرشادات نتبعها عن تخطيط منحنى.

مثل $y = f(x)$:

1- أوجد نطاق f (D_f)

2- عين مناطق وجود المنحنى أعلى محور x أو أسفله .

أيْ قيم x التي تكون $f(x) > 0$ ، وقيم x التي تكون $f(x) < 0$

3- أوجد وصنف عدم الاستمرارية إن وجد .

4- أوجد تقاطع المنحنى مع المحورين.

نقط التقاطع مع محور x هي $\{x : f(x) = 0\}$ ،

نقط التقاطع مع محور y هي $(0, f(0))$ إذا وجدت $f(0)$.

5- إذا كانت f دالة زوجية تكون الدالة متماثلة حول المحور y وإذا كانت فردية كان بيان الدالة متماثل بالنسبة لنقطة الأصل (بالنسبة للمستقيم $y = x$ أ، $y = -x$)

6- أوجد الأعداد الحرجة والقيم الحرجة المحلية. وذلك بإيجاد قيم x التي عندها $f'(x) = 0$ أو $f'(x)$ غير موجودة ثم استخدام اختبار المشتقة الأولى لتصنيف القيم القصوى.

عين ما إذا كان هناك أركان أو ناب للمنحنى.

7- أوجد نقط الانقلاب ومناطق تقعر المنحنى لأعلى ولأسفل .

وذلك بإيجاد $f''(x)$ واستعمال اختبار المشتقة الثانية كلما أمكن. فيكون المنحنى مقعر لأعلى عندما $f''(x) > 0$ ولأسفل عندما $f''(x) < 0$.

إذا كانت f مستمرة عند c، $f''(x)$ تغير إشارتها عند c فإن $(c, f(c))$ هي نقطة انقلاب.

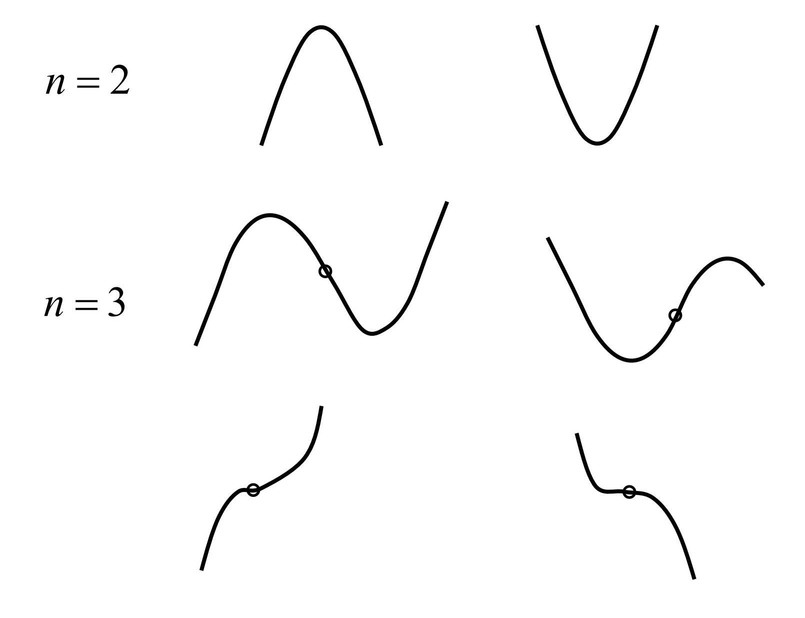
8- إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

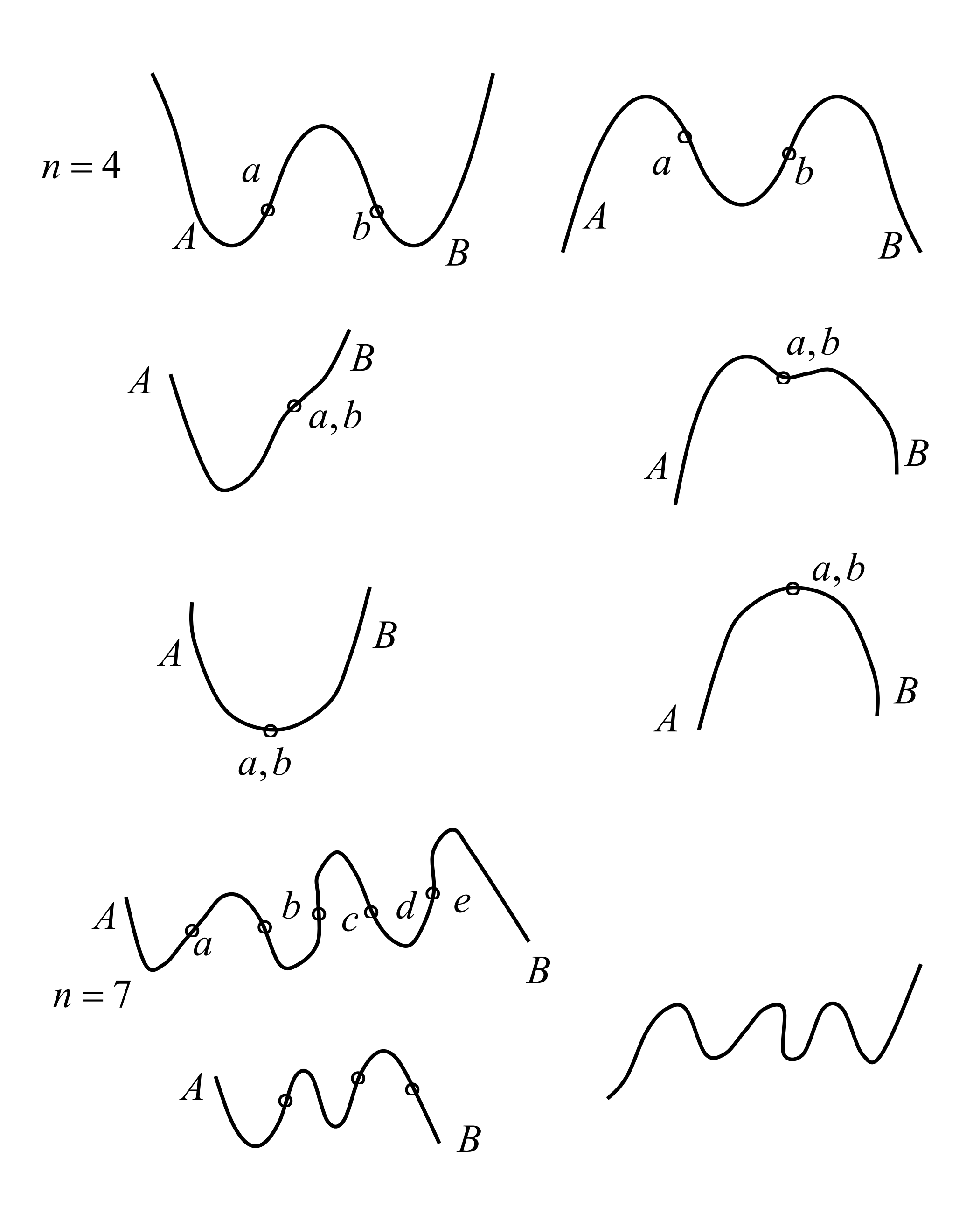
فإن $y = L$ هو خط تقاربي أفقي

إذا $\lim_{x\to a^+} f(x)$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x)$

هي ∞ أو $-\infty$ فإن $x = a$ هو خط تقاربي رأسي .

من أبسط الدوال هي كثيرات الحدود. فيبدو بيانها مستمر وأملس دائماً وله كثير من النقط العليا والنقط السفلى. وكل عدد حرج يعين قيمة قصوى محلية أو نقطة انقلاب وعدد طيات المنحنى عادة هي $(n-1)$ إذا كان كثير الحدود من الدرجة n. فمثلا





عدد المناطق المقعرة لأعلى + عدد المناطق المقعرة لأسفل $= n-1$

عدد النقاط الحرجة $= n-2$

ولكن قد تنطبق بعض النقاط الحرجة على بعضها فيكون

عدد المناطق $\geq n-1$

عدد النقاط الحرجة $\geq n-2$

والدالة الكسرية مثل $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$، g، f كثيري حدود يكون لكل صفر من أصفار $h(x)$، مثل $x=c$، حط تقاربي رأسي. وإذا كانت درجة $g(x)$ مساوية لدرجة $h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$، المستقيم $y=L$ هو خط تقاربي أفقي.

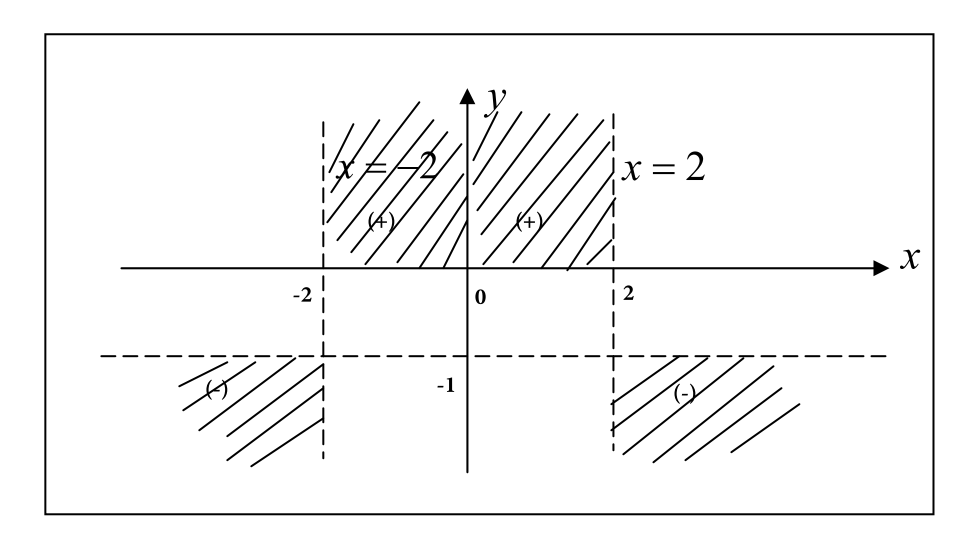
مثال (17)

ناقش وخطط بيان f ، $f=\dfrac{x^2}{4-x^2}$

الحــل

(2,1,8) نوجد $f(x)=\dfrac{x^2}{(2-x)\ (2+x)}$ ،D_f الأعداد الحرجة $-2,0,2$

الفترة	$(2,\infty)$	$(0,2)$	$(-2,0)$	$(-\infty,-2)$
إشارة f	-	+	+	=



شكل (124)

$D_f = R - \{-2,2\}$ أي $D_f = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$

وأماكن وجود المنحنى هي المظللة في شكل (124)

ويوجد خطان تقاربيان رأسيان $x = -2$ ، $x = 2$ يمثلان بخطان رأسيان متقاطعان كما بالشكل (124).

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$$ ،

أيْ $y = -1$ هو خط تقاربي أفقي

3) ماعدا عند $x = \pm 2$ الدالة مستمرة .

4) نقط التقاطع مع المحور x ، $f(x) = 0$ ، $x = 0$

نقط التقاطع مع المحور y عند $x = 0$ ، $f(0) = 0$

المنحنى يقطع المحورين عند $(0,0)$ فقط .

5) $f(-x) = f(x)$ ، f دالة زوجية بيانها متماثل حول المحور y .

6)
$$f'(x) = \frac{(4 - x^2)(2x) - x^2(-2x)}{(4 - x^2)^2}$$

$$= \frac{2x(4 - x^2 + x^2)}{(4 - x^2)^2}$$

$$= \frac{8x}{(4 - x^2)^2}$$

$f'(x) = 0$ عند $x = 0$ $\therefore$ $x = 0$ عدد حرج.

نختبر فترات تزايد وتناقص الدالة في الفترات الموضحة

$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$	الفترة
-	-	+	+	إشارة f'
متناقصة	متناقصة	متزايدة	متزايدة	النتيجة f

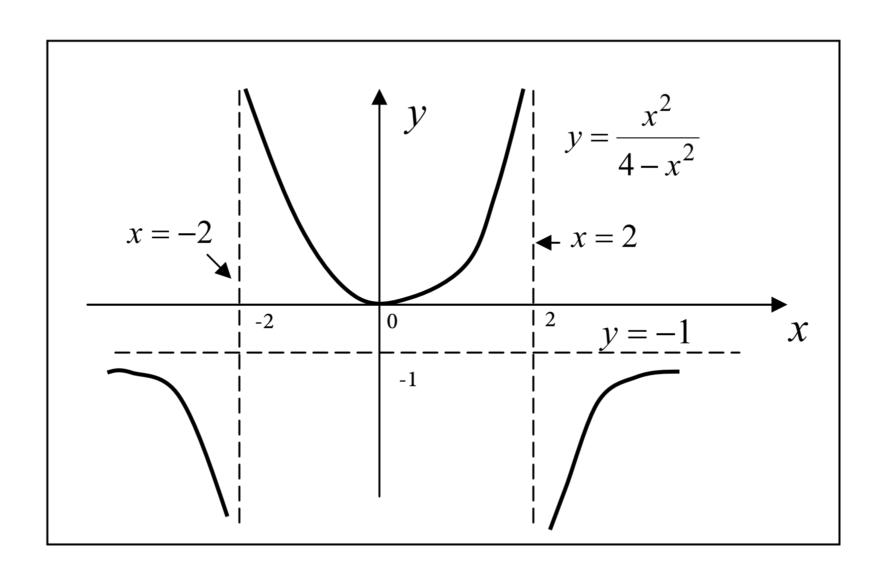
تتغير إشارة $f'(x)$ عند $x=0$ من (-) إلى (+)
إذن $f(0)$ نهاية صغرى محلية.

7)
$$f''(x)=\frac{\left(4-x^2\right)^2 8-8x2-\left(4-x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(4-x^2\right)^4}$$
$$=8\frac{4-x^2+4x^2}{\left(4-x^2\right)^3}$$
$$=8\frac{\left(3x^2+4\right)}{\left(4-x^2\right)^3}$$

البسط موجب دائماً وتحدد إشارة f'' من $\left(4-x^2\right)^3$

$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$	الفترة
-	+	-	إشارة f''
لأسفل	لأعلى	لأسفل	التقعر

ولا يوجد نقط انقلاب عند 2- أو 2 لأن f غير مستمرة عندها وحيث أن $f''(0)=+\frac{1}{2}$ ، فهذا يؤكد أن $x=0$ هي نقطة نهاية صغرى محلية ، $f(0)=0$. وبيان المنحنى يصبح كما في شكل (125)



شكل (125): مثال (17)

مثال (18): ناقش وخطط بيان f

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-5x+6}$$

الحــل

1) النطاق: المقام $=(x-2)(x-3)$ $\therefore$ D_f هو جميع الأعداد الحقيقية ماعدا $x=2$ ، $x=3$

2) المدى: البسط موجب دائماً ماعدا $x=0$. والمقام سالب في الفترة $(2,3)$ وموجب في الفترة $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$.

   إذن $f(x)$ موجبة على $(-\infty,2)$، سالبة على $(2,3)$ وموجبة على $(3,\infty)$.

3) f لها عدم استمرارية لا نهائية عند 2، 3 ومستمرة ما عدا ذلك.

4) نقط التقاطع مع محور x عند $f(x)=0$ هي $x=0$

ونقط التقاطع مع محور y عند $x=0$، $y=f(0)=0$ المنحنى يقطع المحورين عند $(0,0)$ فقط.

5) f ليست زوجية ولا فردية ولذلك غير متماثلة حول y ولا حول نقطة الأصل.

6)
$$f'(x)=\frac{(x^2-5x+6)4x-2x^2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$$

$$=\frac{2x(2x^2-10x+12-2x^2+5x)}{(x^2-5x+6)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(-5x+12)}{(x^2-5x+6)^2}$$

بوضع $f'(x)=0$ نحصل على $x=0$، $x=\frac{12}{5}$ كنقط حرجة

أما $x=2$، $x=3$ ليست حرجة لأن $f(2)$، $f(3)$ غير موجودتان.

باختيار قيمة مناسبة لـ x في الفترات المختلفة نحصل على مناطق تزايد وتناقص الدالة كما بالجدول الآتي

الفترة	$(3,\infty)$	$\left(\frac{12}{5},3\right)$	$\left(2,\frac{12}{5}\right)$	$(0,2)$	$(-\infty,0)$
إشارة f'	-	-	+	+	-
النتيجة f	متناقصة	متناقصة	متزايدة	متزايدة	متناقصة

ومن اختبار المشتقة الأولى، f لها نهاية صغرى محلية، $f(0)=0$ ونهاية عظمى محلية $f\left(\frac{12}{5}\right)=-48$

7) يمكنك إثبات أن،

$$f''(x)=\frac{4\left(5x^3-18x^2+36\right)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

ولحل المعادلة $f''(x)=0$ يلزمنا حل معادلة الدرجة الثالثة

$$5x^3-18x^2+36=0$$

وهذا أمر صعب في المرحلة الحالية إلا إننا نعلم أن لهذه المعادلة حل حقيقي عند $x\approx 2.35$

أي يوجد نقطة انقلاب عند $(2.35,-50.4)$ وكذلك عند $x\approx 2.5$، $x\approx -1.2$

8) لإيجاد الخطوط التقاربية الأفقية،

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2-5x+6}=2$$

إذن يوجد خط تقاربي أفقي $y=2$

أما الخطوط التقاربية الرأسية فهي

$$x=3 \ ،x=2$$

من الجدير بالملاحظة (شكل 126) أن بيان f يقطع خط التقارب الأفقي، $y=2$، عندما،

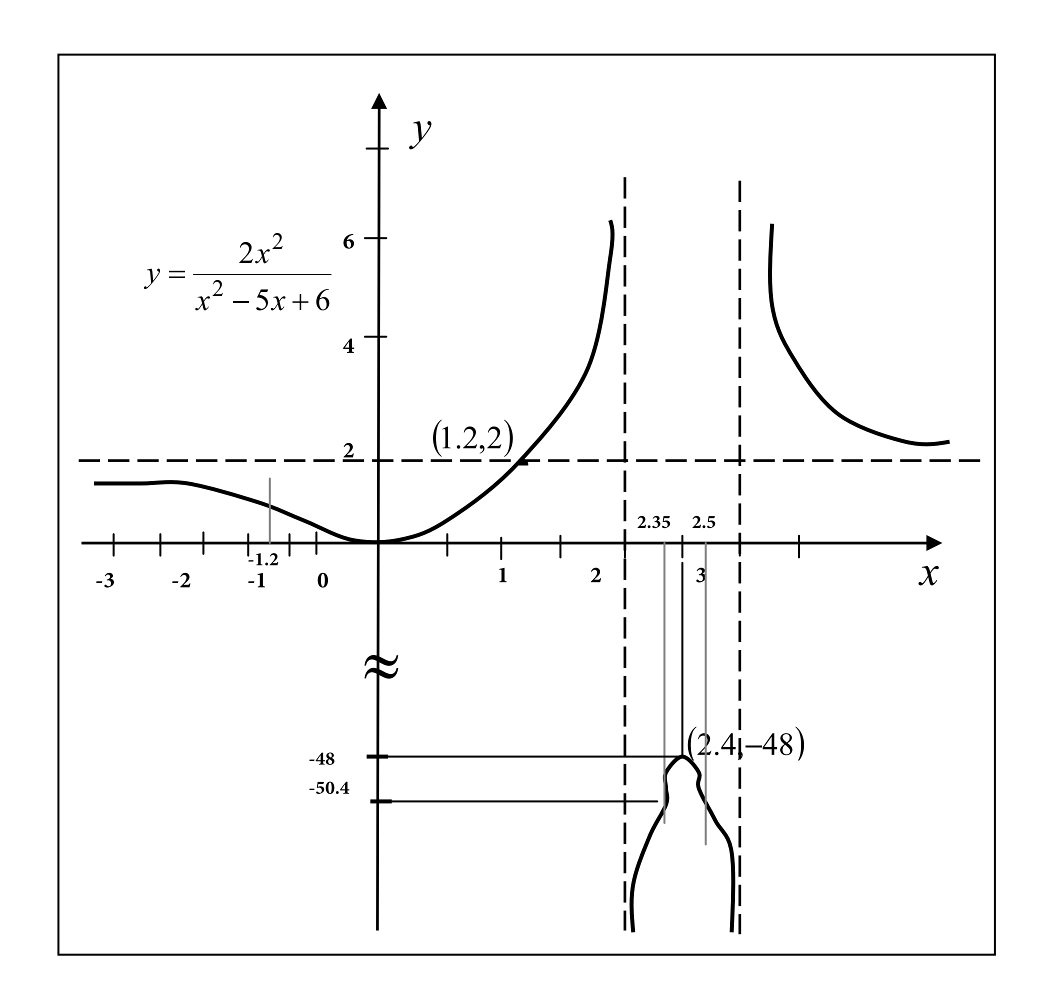
$$f(x)=2$$

$$\frac{2x^2}{x^2-5x+6}=2$$

$$x^2=x^2-5x+6$$

$$x=\frac{6}{5}$$

أي أن نقطة التقاطع $\left(\frac{6}{5},2\right)$.



شكل (126): مثال (18)

الخطوط التقاربية المائلة

إذا كان $f(x) = N(x)/D(x)$ ، $N(x)$، $D(x)$ كثيرا حدود بحيث درجة $N(x)$ أكبر من درجة $D(x)$ بمقدار 1، فإن بيان f يكون له خط تقاربي مائل $y = mx + c$ ، أي أن المسافة الرأسية بين بيان f وهذا المستقيم يقترب من 0 كلما اقتربت x من $\pm\infty$. ولبرهان هذه القاعدة، نستعمل القسمة المطولة $N(x)$ تقسيم $D(x)$ للتعبير عن $f(x)$ على الشكل.

$$f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=mc+c+\frac{r(x)}{D(x)}$$

حيث $r(x)$ ذو درجة أقل من $D(x)$ لدرجة أن $\lim_{x\to\infty}\frac{r(x)}{D(x)}=0$ ،

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{r(x)}{D(x)}=0$$

وبالتالي تقترب $f(x)$ من $y=mx+c$ كلما اقتربت x من ∞ أو $-\infty$.

مثال (19):

اوجد الخطوط التقاربية لبيان f ،

$$f(x)=\frac{3x^3}{x^2+1}$$

الحــل

درجة البسط أعلى من درجة المقام، لا يوجد خطوط تقاربية أفقية، المقام موجب دائماً ولا ينعدم، لا يوجد خطوط تقاربية رأسية وبإجراء القسمة نجد

$$f(x)=\frac{3x^3+3x-3x}{x^2+1}$$

$$=\frac{3x(x^2+1)-3x}{x^2+1}$$

$$f(x)=3x-\frac{-3x}{x^2+1}$$

ولكن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x^2+1}=0$$

$\therefore$ يوجد خط تقاربي مائل هو $y=3x$

مثال (20):

ناقش وارسم بيان f ،

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+6x-7}$$

الحــل

$$f(x)=\frac{x^3}{(x+6)(x-1)}$$

الدالة مستمرة ما عدا عند $x=1$ ، $x=-7$ حيث يوجد عدم استمرارية لا نهائية. وبحث إشارة الدالة نجد أن

الفترة	$(1,\infty)$	$(0,1)$	$(-7,0)$	$(-\infty,-7)$
نختار x للاختبار	2	$\frac{1}{2}$	-1	-8
إشارة $f(x)$	+	-	+	-
النتيجة أن f	موجبة	سالبة	موجبة	سالبة

لا يوجد خطوط تقاربية أفقية لأن درجة البسط $>$ درجة المقام.

يوجد خطان تقاربيان رأسيان عند $x=1$ ، $x=-7$

وبما أن،

$$f(x)=x+\frac{-6x^2+7x}{x^2+6x-7}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^2+7x}{x^2+6x-7}=-6$$

إذن يوجد خط تقاربي مائل،

$$y=x-6$$

نستطيع الآن إثبات أن

$$f'(x)=\frac{x^2\left(x^2+12x-21\right)}{\left(x^2+6x-7\right)^2}$$

يوجد نقط حرجة عند $x=0$ وعندما

$$x^2+12x-21=0$$

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{144+84}}{2}$$

$$=-6\pm\sqrt{57}$$

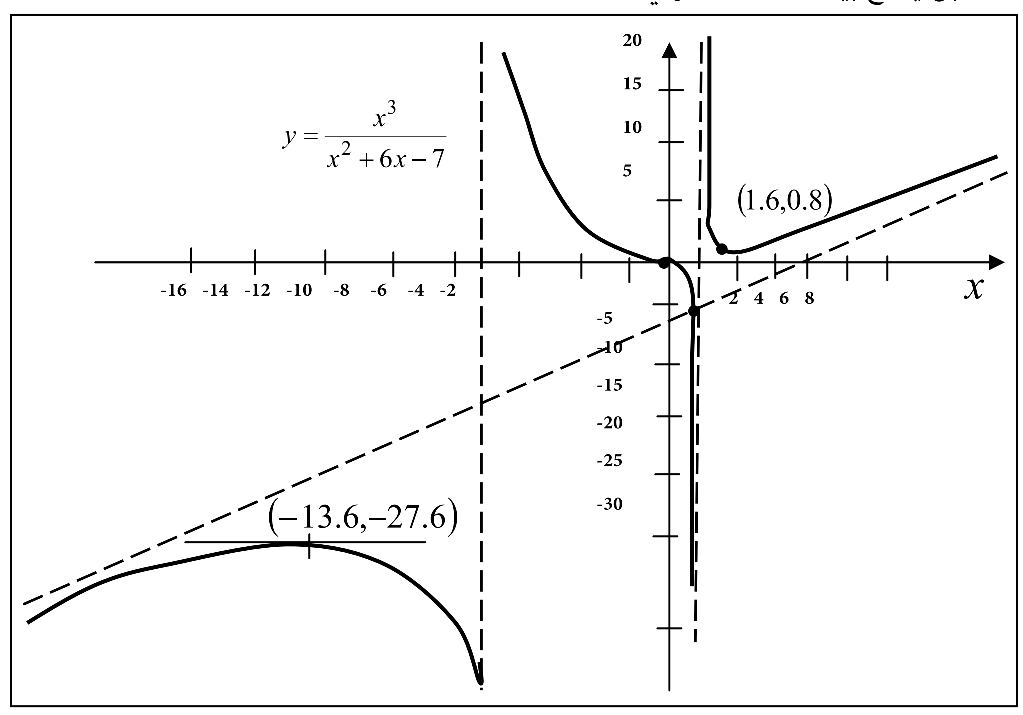
$$\approx 1.6\ ,\ -13.6$$

لذلك نبحث إشارة f' لتحديد القيم القصوى. ويكفي لذلك

الفترة	المختارة - x	إشارة f'	النتيجة أن f
$(-\infty,-13.6)$	-20	+	متزايدة
$(-13.6,-7)$	-8	-	متناقصة
$(-7,0)$	-1	-	متناقصة
$(0,1)$	0.5	-	متناقصة
$(1,1.6)$	1.5	-	متناقصة
$(1.6,\infty)$	10	+	متزايدة

بحث إشارة المقدار $x^2+12x-21$ لأن باقي العوامل موجبة.
نجد أن، توجد نهاية عظمى محلية عند $x=-13.6$ هي $f(-13.6)\approx -27.3$ ، توجد نهاية صغرى محلية عند $x=1.6$ هي $f(1.6)\approx 0.8$.

مما سبق يتضح بيان الدالة كما هو في شكل (127).



شكل (127): مثال (20)

ويمكننا إضافة ملاحظتين،

1) $x = 0$ ليست قيمة قصوى هي نقطة انقلاب ميل المماس عندها 0.

2) المنحنى يقطع خطه التقاربي $y = x - 6$ عندما

$$\frac{x^3}{x^2+6x-7} = (x-6)$$

$$x^3 = (x-6)(x^2+6x-7)$$

$$= x^3 - 43x + 42$$

$$x = \frac{42}{43} \approx 0.977$$

أي عند النقطة $(0.977,-5.023)$

مثال (21):

ناقش وارسم $gr(f)$ ،

$$f(x)=4x^3-3x^4$$

ثم ارسم بياني الدالتين g ، h حيث

$$h(x)=\sqrt{4x^3-3x^4} \quad ، \quad g(x)=\left|4x^3-3x^4\right|$$

الحــل

الدالة f مستمرة على R ، حيث أن $f(x)=x^3(4-3x)$

f موجبة على الفترة $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ وسالبة على الفترتين $\left(\frac{4}{3},\infty\right)$ ، $(-\infty,0)$وبيان الدالة يقطع المحور x عند $x=\frac{4}{3}$, $x=0$ والمحور y عند $x=0$ أي يمر بالنقطتين $(0,0)$، $\left(\frac{4}{3},0\right)$.

$$f'(x)=12x^2-12x^3$$
$$f''(x)=24x-36x^2$$

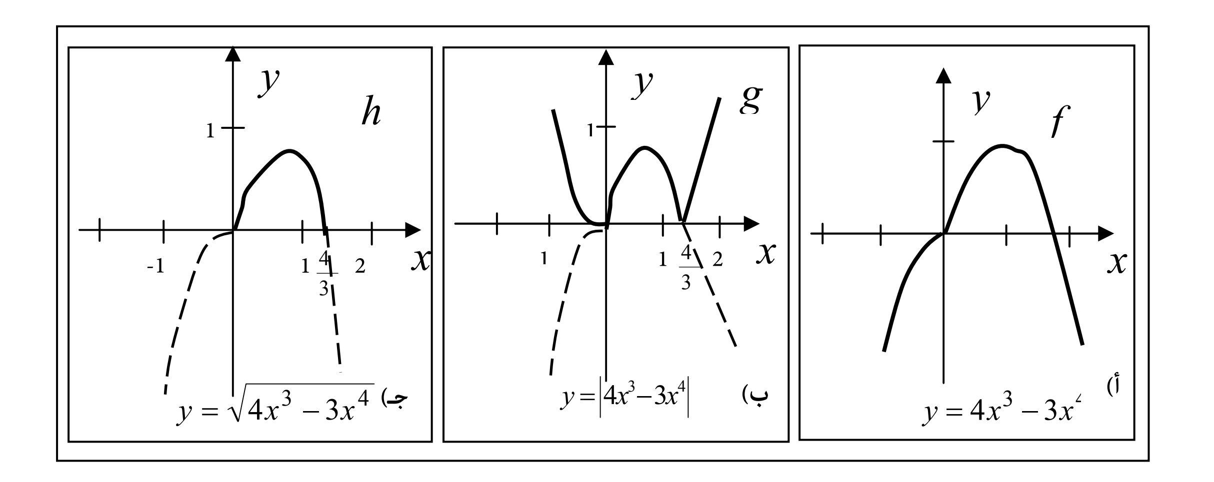
$f'(x)=0$ عند $x=0$ ، $x=1$

، $f''(0)=0$ ، $f'(1)=-12$

$\therefore$ النقطة $(1,1)$ تناظر نهاية عظمى محلية

أما عند $x=0$ فإن $f'(-1)=24$ ، $f'\left(\frac{1}{2}\right)=+\frac{3}{2}$

أي f' لا تتغير إشارتها وهي ليست نقطة حرجة وإنما هي نقطة إنقلاب ميل المماس عندها 0.
ولا يوجد أي خطوط تقاربية. الرسم في شكل (128-أ).



شكل (128): مثال (21)

الدالة $g(x)=\left|4x^3-3x^4\right|$ هي نفسها $f(x)$ على الفترة التي فيها f موجبة أي على $\left[0,\frac{4}{3}\right]$ لأن $g=|f|=f$ ولكن على الفترتين $\left[\frac{4}{3},\infty\right)$، $(-\infty,0]$ فإن f سالبة $g=|f|=-f$ فيكون بيان g هو انعكاس لبيان f بالنسبة للمحور x كما هو واضح في شكل (128-ب).

الدالة $h(x)=\sqrt{4x^3-3x^4}$ هي في الواقع $h(x)=\sqrt{f(x)}$ ونطاق $h(x)$ هو قيم x التي تجعل $f(x)>0$ أي أن نطاقها $0\le x\le\frac{4}{3}$. لذلك فبيان $h(x)$ يقع فقط في الفترة $\left[0,\frac{4}{3}\right]$. وقيم $h(x)$ هي الجذور التربيعية لقيم $f(x)$ المناظرة شكل (128-جـ).

تمارين (5-5)

فيما يلي من (1) إلى (24) ناقش وارسم بيان الدالة f .

(1) $f(x)=\dfrac{3-x}{x+2}$ (2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-1}$

(3) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ (4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

(5) $f(x)=2x\big/\sqrt{x^2+x+2}$ (6) $f(x)=-3x\big/\sqrt{x^2+9}$

(7) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-4x+3}$ (8) $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+3}$

(9) $f(x)=(x-4)\big/\sqrt[3]{x^2}$ (10) $f(x)=\dfrac{-x^2-4x-4}{x+1}$

(11) $f(x)=\dfrac{x+5}{\sqrt{x}}$ (12) $f(x)=\left(1-x^3\right)\big/2x^2$

(13) $f(x)=x^2\big/(x+1)$ (14) $f(x)=\dfrac{2x^2-6x}{x^2-x-12}$

(15) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-3}{x-2}$ (16) $f(x)=\left(4-x^2\right)\big/(x+3)$

(17) $f(x)=\dfrac{-2x^2+14x-24}{x^2+2x}$ (18) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x+1}$

(19) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-1}$ (20) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-4}$

(21) $f(x)=\dfrac{2x^2-2x-4}{x^2+x-12}$ (22) $f(x)=\dfrac{-3x^2-3x+6}{x^2-9}$

(23) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (24) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$

(25) عين القيم القصوى وارسم بيان الدالة f ،

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ,x<1 \\ 3(x-1)^2 & ,1\le x<3 \\ -7x^2+54x-87 & ,3\le x<5 \\ 8(6-x)^2 & ,5\le x<6 \\ 0 & ,x\ge 6 \end{cases}$$

في التمارين من (26) إلى (31) أوجد القيم القصوى ونقط الانقلاب وخطط بيان f.

(26) $f(x)=\dfrac{x^2}{(2x-1)^2}$ (27) $f(x)=\dfrac{2x}{(x+2)^2}$

(28) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$ (29) $f(x)=\dfrac{-4}{x^2+1}$

(30) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{x^2}$ (31) $f(x)=8x^3+\dfrac{3}{8x}$

خطط بيان f من (32) إلى (44)

(32) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}$ (33) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$

(34) $f(x)=\dfrac{x-4}{4-x^2}$

(35) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$

(36) $f(x)=\sqrt{x^2+6x-7}$

(37) $f(x)=\left|x^2+6x-7\right|$

(38) $f(x)=\left(x^2+6x-7\right)^2$

(39) $f(x)=\left(x^2+6x-7\right)^3$

(40) $f(x)=\left|8+2x-x^2\right|$

(41) $f(x)=\left|2x^3-6x\right|$

(42) $f(x)=\left|x^3+8\right|$

(43) $f(x)=2+\left|\cos x\right|$

(44) $f(x)=1-\left|\sin x\right|$

في التمارين من (45) إلى (50) عين جميع الخطوط التقاربية لبيان f .

(45) $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$

(46) $f(x)=\dfrac{2x^3}{9-x^2}$

(47) $f(x)=\dfrac{2x}{9-x^2}$

(48) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

(49) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-9x^2+1}{x^2-9}}$

(50) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2}{x^2-1}$

الباب السادس

تطبيقات على التفاضل

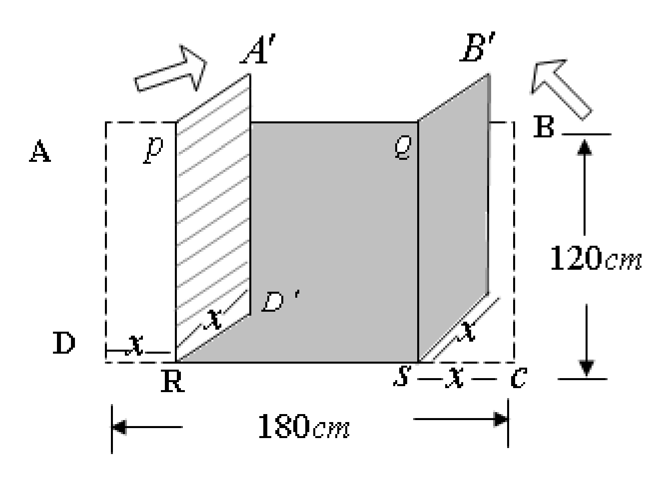
سوف نهتم خصوصاً بالتطبيقات التي تبحث عن النهايات العظمى أو الصغرى للدالة.
فإذا كانت Q كمية فيزيائية تتغير مع متغير مستقل x على النحو $Q = f\left(x\right)$. فإذا كانت $f\left(x\right)$ قابلة للاشتقاق فإنه من الممكن استعمال $\frac{dQ}{qx}$ لإيجاد القيم القصوى للكمية Q.
أحيانا نسمي القيمة القصوى، القيمة المفضلة optimal value، فقد تكون القيمة المفضلة هي العظمى تارة وقد تكون الصغرى تارة لأخرى. ونسمي هذه المسألة، مسألة الحصول على القيمة المفضلة optimization problem. سوف نبدأ بتطبيقات عامة ثم نعطي تطبيقات خاصة في الميكانيكا والاقتصاد والعلوم الاجتماعية وعلوم الحياة.

<u>بند 6-1: تطبيقات على القيم القصوى</u>

مثال (1): لوح معدني مستطيل عرضه $120\,cm$ وطوله $180\,cm$. ثني من نهايتي الطول جزئين طوليهما x. أي أدير $QBCS$ حول QS زاوية قائمة وكذلك $APRD$ حول PR زاوية قائمة بحيث $DR = SC$.
اوجد مقدار DR أو SC بحيث يسمح الجاروف المصنوع بهذه الكيفية من جمع أكبر كمية من المادة أثناء الجرف.

الحــل

اللوح وكيفية ثنيه موضحه في شكل (129). x ترمز لطولي DR ، SC.



شكل (129): مثال (1)

تتحدد سعة الجاروف حسب عرضه RS وارتفاع جوانبه RD' أو SC'. أي هذه المساحة أكبر ما يمكن. إذا رمزنا للمساحة بالرمز A فإن

$$A = x(180 - 2x)$$
$$= 180x - 2x^2 \quad , \quad 0 \le x \le 90$$

لأن x أكبر من 0 ولأنها أقل من نصف الطول وللحصول على A القصوى،

$$\frac{dA}{dx} = 180 - 4x$$
$$= 0$$

يؤدي إلى $x = 45cm$

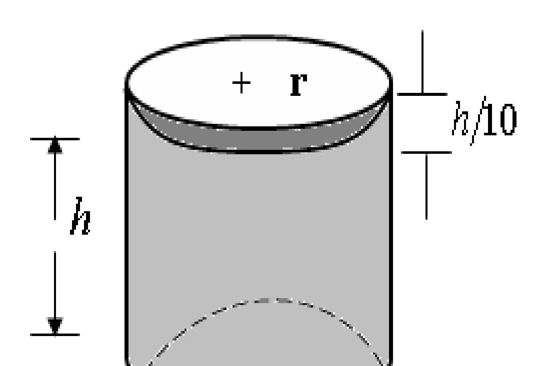
وبما أن $\frac{d^2A}{dx^2} = -4$

$\therefore\ x = 45$ هي عدد حرج يناظر نهاية عظمى للمساحة A.

وعلى ذلك يثنى جزء طوله $x = 45cm$ من نهايتي الطول للحصول على أفضل جاروف.

مثال (2): يراد صنع علب للمشروب تسع كل منها $100cm^3$ من التن، على شكل أسطوانة دائرية قائمة بغطاء. علماً بأن للغطاء حافة تساوي $\frac{1}{10}$ من ارتفاع الأسطوانة تستخدم للبرشمة. أوجد أبعاد هذه العلب بحيث تكون بأقل تكاليف ممكنة.

الحــل



بفرض r نصف القطر، h الارتفاع.

حجم العلبة V

$$V = \pi r^2 h$$

إذن

$$100 = \pi r^2 h$$

أو

$$h = \frac{100}{\pi r^2}$$

مساحة الشريحة المستخدمة في الصناعة،

مساحة الحافة + مساحة القاعدتين + المساحة الحانبية = A

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{h}{10}$$

$$= 2\pi r\left(h + r + \frac{h}{10}\right)$$

$$= 2\pi r\left(r + \frac{11h}{10}\right)$$

ولتقليل التكاليف يجب جعل هذه المساحة أصغر ما يمكن. بوضع $h=\frac{100}{\pi r^2}$

$$A=2\pi r\left(r+\frac{110}{\pi r^2}\right)$$

$$A=2\pi r^2+\frac{220}{r}$$

$$\frac{dA}{dr}=4\pi r-\frac{220}{r^2}$$

والقيمة القصوى لـ A عندما $A'=0$

$$2\pi r-\frac{220}{r^2}=0$$

$$2\pi r^3-220=0$$

$$r=\left(\frac{110}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$r\approx 3.25cm$$

$$h=\frac{100}{\pi(3.25)^2}$$

$$h=3cm$$

والشريط المستخدم للبرشام عرضه $0.3cm$ وطوله $2\pi r=20.4cm$

وبما أن

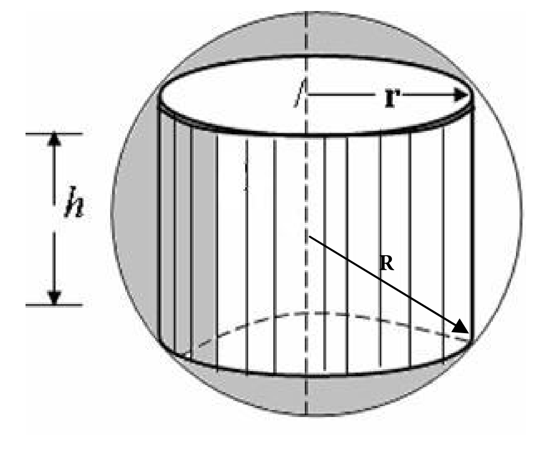
$$\frac{d^2A}{dr^2}=2\pi+\frac{440}{r^3}$$

موجبة دائماً. إذا القيمة القصوى للمساحة هي النهاية الصغرى للمساحة المستخدمة.

مثال (3)

أوجد أكبر حجم اسطوانة دائرية قائمة من الممكن أن تمس حافتي قاعدتها السطح الداخلي لقشرة كروية نصف قطرها R.

الحــل



لكي نعبر عن حجم الاسطوانة (شكل 130)، v، بدلالة متغير واحد. نوجد أولاً علاقة بين نصف قطر الاسطوانة ونفرضه r وارتفاعها ونفرضه h. وتبدو هذه العلاقة واضحة من مبرهنة فيثاغورث،

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$$

شكل (130)

$$r^2 = R^2 = -\frac{1}{4}h^2$$

والحجم v،

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

$$V = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$$

ويبلغ v قيمته العظمى عندما

$$\frac{dv}{dh} = 0$$

$$\frac{dv}{dh} = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right) = 0$$

$$h^2 = \frac{4}{3} R^2$$

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}} R$$

وعندئذ،

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2}{3}$$

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} R$$

$\therefore$ حجم الأسطوانة المفضلة هما

$$r = \frac{\sqrt{6}}{3} R \quad , \quad h = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$$

وواضح أن، اختبار المشتقة الثانية،

$$\frac{d^2 v}{dh^2} = \pi \left(-\frac{3}{2} h \right)$$

وبما أن v'' سالبة إذن فعلاً v نهاية عظمى.

ومقداره،

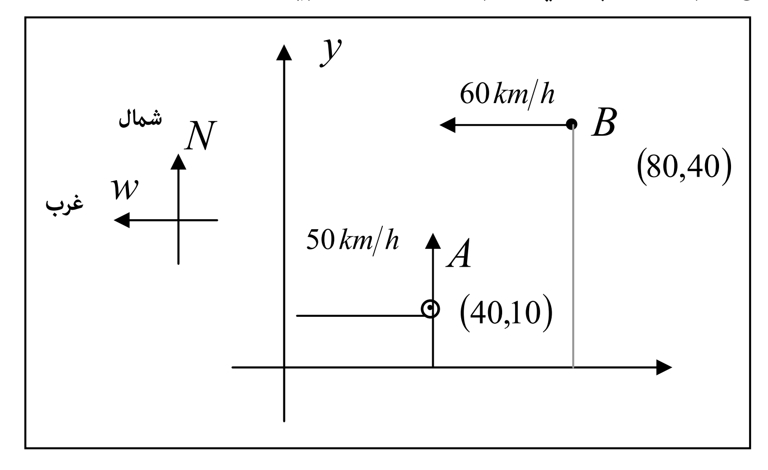
$$V_{\max} = \pi \left(R^2 \cdot - \frac{2\sqrt{3}}{3} R - \frac{2\sqrt{3}}{9} R^3 \right)$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{3} R^3}{9}$$

مثال (4)

أبحرت سفينة A في الساعة العاشرة صباحاً من نقطة إحداثياتها الكارتيزيان $(40,10)$ كم متجهة نحو الشمال (المحور y) بسرعة 50 (كيلومتر/ساعة)

في نفس الوقت الذي أبحرت فيه سفينة B من النقطة $(80,40)$ كم بسرعة 60 (كيلومتر/ساعة) غرباً متى تصبحان أقرب ما يمكن لبعضهما والمسافة بينهما عندئذ. (شكل 131).



شكل (131)

الحـــل

بعد زمن قدره t تكون A قد قطعت مسافة = السرعة × الزمن $= 50t$ شمالاً

وأصبح إحداثياتها $(40,10,50t)$

في نفس هذا الزمن تكون B قد قطعت مسافة $= 60t$ غرباً

وأصبح إحداثياتها $(80-60,40)$ عندئذ يكون البعد بينها هو،

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

أو،

$$D^2 = (40-60t)^2 + (40-50t)^2$$

المراد أن تكون d وبالتالي d^2 أصغر ما يمكن،

$$\frac{d(D^2)}{dt} = 2(40-60t)(-60) + 2(40-50t)(-50) = 0$$

بالقسمة على 200،

$$-6(4-6t) - 5(4-5t) = 0$$

$$-24+36t-20+25t=0$$
$$61t=44$$
$$t=\frac{44}{61}\quad \text{hours}$$

ثانية دقيقة

$$t=0.7213\ \ h=43\quad 17$$

وحيث أن
$$\frac{d^2\left(D^2\right)}{dt}=12200>0$$

$\therefore$ فعلا D نهاية صغرى هي

$$D_{\min}^2=\left(40-60\times\frac{44}{61}\right)^2+\left(40-50\times\frac{44}{61}\right)^2$$
$$=26.23$$
$$D_{\min}\approx 5.13\ \ km$$

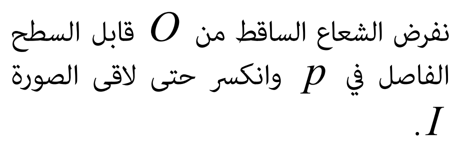
مثال (5):

إذا وضع جسم O في الهواء على ارتفاع ما عن سطح البحر تكونت له صورة I، داخل الماء. وأي شعاع ضوئي يصدر من الجسم ينكسر حين يلاقى السطح الفاصل بين الهواء والماء ويصل إلى الصورة. وتسمى الزاوية بين الشعاع الساقط والعمود على السطح الفاصل، θ_1، زاوية السقوط. والزاوية بين الشعاع المنكسر والعمود، θ_2، زاوية الانكسار.

وتنص قاعدة فيرمات على أن الضوء يقطع الطريق من الجسم إلى الصورة في أقل زمن ممكن. فإذا كانت υ_1 سرعة الضوء في الهواء، υ_2 سرعة الضوء في الماء

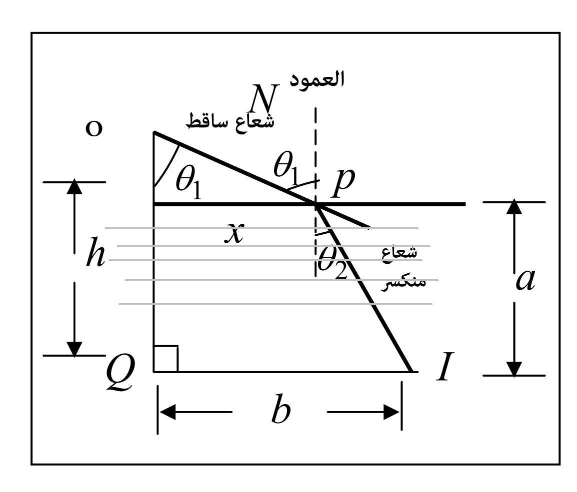
فاثبت قانون سنل، $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$. (شكل 132)

الحــل



نفرض الشعاع الساقط من O قابل السطح الفاصل في p وانكسر حتى لاقى الصورة I.

ونفرض كما بالشكل. p تبعد مسافة x عن مسقط O على السطح الفاصل، O_1 كما نفرض الأفقي عند I قابل الرأسي عند O في نقطة Q.



شكل (132)

وأن $OQ = h$ ،$QI = b$

الزمن المستغرق من O إلى p = $\dfrac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$ أ، $t_1 = \dfrac{\overline{OP}}{\upsilon_1}$

والزمن المستغرق من p إلى I = $\dfrac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ أ، $t_2 = \dfrac{\overline{PI}}{\upsilon_2}$

$\therefore$ الزمن الكلي من O إلى I هو

$$T = t_1 + t_2 = \frac{\overline{OP}}{\upsilon_1} + \frac{\overline{PI}}{\upsilon_2}$$

ولكن،

$$\overline{PI}^2 = a^2 + (b-x)^2$$

و

$$\overline{OP}^2 = (h-a)^2 + x^2$$

إذن،

$$T = \frac{\sqrt{(h+a)^2 + x^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{a^2(b-x)^2}}{\upsilon_2}$$

والقيمة القصوى للزمن T تحدث عندما، $\frac{dT}{dx}=0$،

أيْ

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{\upsilon_1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{(h+a)^2+x^2}}\cdot(2x)+\frac{1}{\upsilon_2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2(b-x)^2}}2(b-x)(-1)=0$$

إذن،

$$\frac{1}{\upsilon_1}\cdot\frac{x}{2\sqrt{(h+a)^2+x^2}}-\frac{1}{\upsilon_2}\cdot\frac{(b-x)}{2\sqrt{a^2(b-x)^2}}=0$$

ومن هندسة الشكل،

$$\sin\theta_1=\frac{x}{\bar{o}p}\cdot\frac{x}{\sqrt{(h+a)^2+x^2}}$$

و

$$\sin\theta_2=\frac{b-x}{\bar{p}I}=\frac{b-x}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}$$

إذن،

$$\frac{\sin\theta_1}{\upsilon_1}-\frac{\sin\theta_2}{\upsilon_2}=0$$

ومنها،

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$$

مثال (6)

النقطتان $A(4,16)$، $B(8,12)$ ثابتتان والنقطة p تتحرك على المستقيم $y+x=0$ وبالتالي تتغير الزاوية $\theta=APB>$ أوجد أكبر قيمة ممكنة للزاوية θ.

الحـــل

نفرض أن إحداثيا p

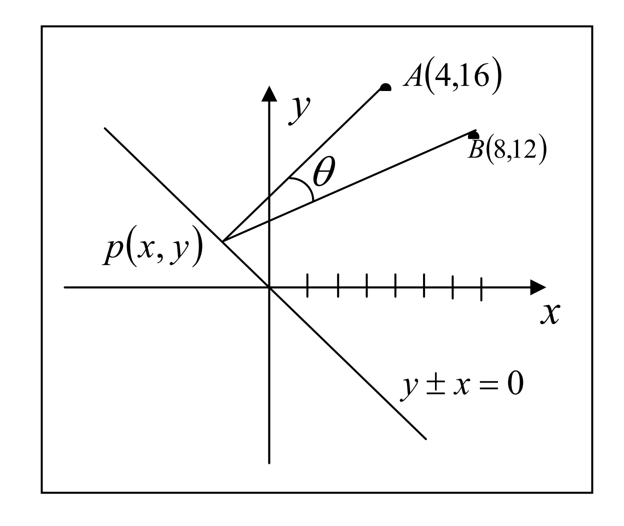
هما (x, y)، لكن

p تتحرك على المستقيم $y = -x$

إذن احداثيا p هما $p(x,-x)$

ميل المستقيم AP،

$$m_1 = \frac{y-16}{x-4} = \frac{-x-16}{x-4}$$



شكل (133)

، ميل المستقيم BP،

$$m_2 = \frac{y-122}{x-8} = \frac{-x-12}{x-8}$$

ظل الزاوية θ بين المستقيمين هو

$$\tan\theta = \frac{|m_2 - m_1|}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \pm \frac{\frac{(x-16)}{x-4} - \frac{(x-12)}{x-8}}{1 + \frac{(x-12)(x-16)}{(x-8)(x-4)}}$$

$$= \pm \frac{(x-8)(x-16) - (x-4)(x-12)}{(x-8)(x-4)(x-12)(x-16)}$$

$$= \pm \frac{80}{2x^2 + 16x + 224} = \frac{\pm 40}{x^2 + 8x + 112}$$

ويكون مقدار $\tan\theta$ أكبر ما يمكن عندما يكون المقام أصغر ما يمكن،

أيْ الدالة f نهاية صغرى ، $f(x)=x^2+8x+112$

$$f'(x)=2x+8=0$$

النقطة الحرجة ، $x=-4$

وعندها $f''(x)=+2$

$\therefore\ x=-4$ نقطة تناظر نهاية للدالة $f(x)$

$$f_{\min}=f(-4)$$
$$=16-32+112$$
$$=96$$

إذن $\tan\theta_{\max}=\dfrac{40}{96}$

$$\tan\theta_{\max}=\frac{5}{12}$$

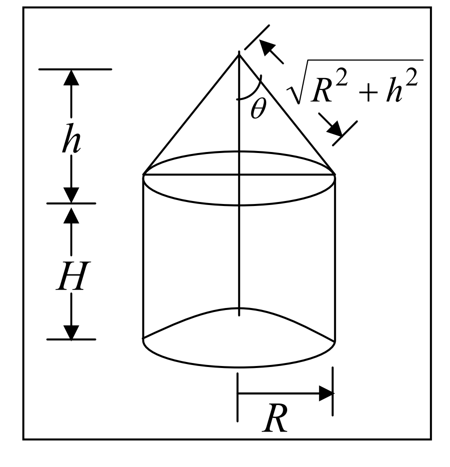
(أخذنا مقدار $\tan\theta$ لأن الإشارة هنا ضرورة لها فالمطلوب مقدار أكبر زاوية)

$$\theta_{\max}=\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$$

مثال (7):

اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها R ملتحمة مع مخروط دائري قائم رأسي قاعدته مطابقة لقاعدة الاسطوانة المتصلة به. إذا كان حجم الحديد المستخدم في صناعة هذا المجسم هو V، أوجد المساحة السطحية للمجسم S بدلالة R، V وزاوية نصف رأس المخروط θ. ثم أثبت أن هذه المساحة أصغر ما يمكن عندما $\theta\approx 48.2^\circ$.

الحــل



شكل (134)

بفرض ارتفاع المخروط هو h، فإن

$$\tan\theta = \frac{R}{h}$$

$$h = R\cot\theta$$

وبفرض ارتفاع الاسطوانة H

$V =$ حجم المخروط + حجم الاسطوانة

$$V = \pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

إذن

$$H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{h}{3}$$

$$H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{R}{3}\cot\theta$$

الآن المساحة الجانبية S،

$$S = \underbrace{2\pi R\cdot H}_{\text{الإسطوانة}} + \underbrace{\pi R \overbrace{\sqrt{R^2+h^2}}^{\text{طول الراسم}}}_{\text{المخروط}} + \underbrace{\pi R^2}_{\text{القاعدة}}$$

$$S = 2\pi R\left(\frac{V}{\pi R^2} - \frac{R}{3}\cot\theta\right) + \pi R\sqrt{R^2 + R^2\cot^2\theta} + \pi R^2$$

$$= \frac{2V}{R} - \frac{2}{3}\pi R^2\cot\theta + \pi R^2\sqrt{1+\cot^2\theta} + \pi R^2$$

ولكن $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$

$$S = \frac{2V}{R} + \pi R^2\left(1 + \csc\theta - \frac{2}{3}\cot\theta\right)$$

وللحصول على قيمة S القصوى،

$$\frac{dS}{d\theta} = \pi R^2 \left(-\csc\theta \cot\theta + \frac{2}{3}\csc^2\theta \right)$$

$$= \pi R^2 \csc\theta \left(\frac{2}{3}\csc\theta - \cot\theta \right)$$

والعدد الحرج عندما $\frac{dS}{d\theta} = 0$، $\csc\theta \neq 0$

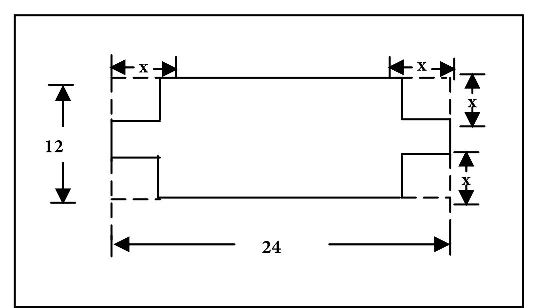
$$\frac{2}{3}\csc\theta - \cot\theta = 0$$

$$\frac{2}{3\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$$

$$\sin\theta \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{3} - \cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \theta = 48.2^\circ$$

تمارين (6-1)

1) صندوق مفتوح قاعدته مستطيلة يراد صنعه من لوح كرتون مستطيل عرضه 12 بوصة. وطوله 24 بوصة. بقطع مربع من كل ركن ثم ثنى الجوانب الناتجة بزاوية قائمة. أوجد طول ضلع المربع الذي يقطع للحصول على صندوق حجمه أكبر ما يمكن.



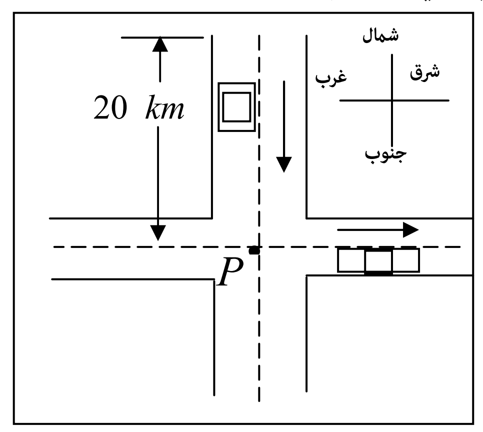
شكل (135)

2) حاوية أسطوانية بدون غطاء يراد أن تسع 24π بوصة مربعة من سائل. ثمن المادة المستخدمة لصناعة القاعدة الدائرية 15 قرشاً للبوصة المربعة وثمن المادة المستخدمة لصناعة السطح المنحنى 5 قروش للبوصة المربعة.
أوجد أبعاد الأسطوانة اللازمة لتقليل التكاليف ما أمكن.

3) أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن أن ترسم داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 12 سم ونصف قطر قاعدته 4 سم ولها نفس محور المخروط.

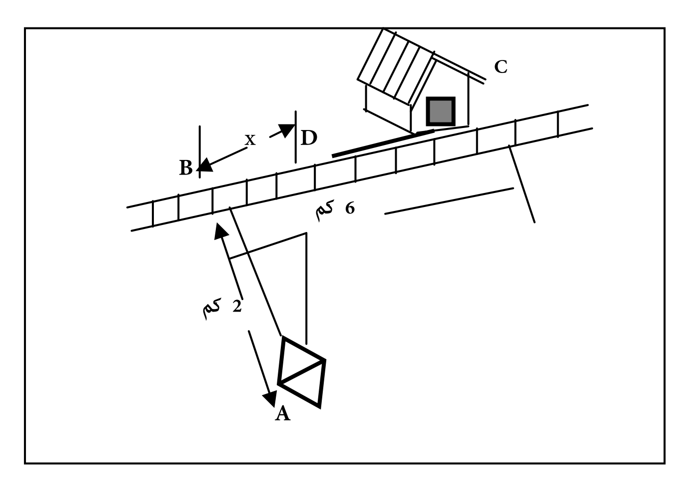
4) طريقان متعامدان أحدهما يمتد من الجنوب إلى الشمال والثاني من الغرب إلى الشرق. وفي الساعة 10:00 صباحاً مرت سيارة بنقطة P متجهة شرقا بسرعة ثابتة 40 كيلومتر في الساعة. وفي نفس اللحظة مرت سيارة أخرى بنقطة شمال P وتبعد عنها 20 كم وهي متجهة جنوبا

بسرعة 50 كم/ساعة. حدد اللحظة التي يكونا أقرب ما يمكن من بعضها. (شكل (136)).



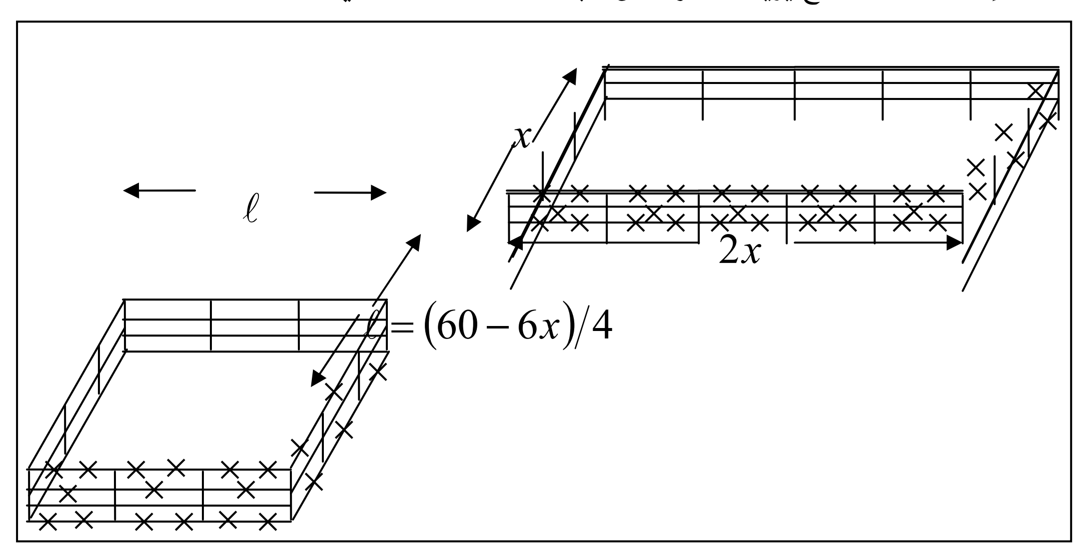
شكل (136)

5) رجل في قارب على بعد 2 كم عن ضفة نهر يرغب الوصول لنقطة على الشاطئ تقع يمينه على بعد 6 كم. إذا كانت سرعة القارب 3 كم/ساعة وسرعة المشي على الطريق 5 كم/ساعة. أوجد أقل زمن لازم الوصول إلى هذه النقطة (شكل (137)).



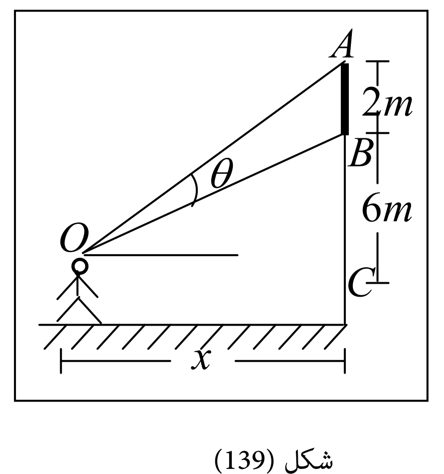
شكل (137)

6) يمتلك فلاح 60 متر طولي من الأسلاك الشائكة يرغب لعمل سور لحقلين منفصلين كما في شكل (138)، أحدهما يكون مستطيلا طوله ضعف عرضه والثاني مربع الشكل. أوجد أبعاد الحقلين إذا علمت أن الفلاح يريد الحصول على أكبر مساحة ممكنة للحقلين.



شكل (138)

7) AB لوحة إعلانية ارتفاعها 2 متر مثبتة بقمة عامود رأسي ارتفاعه 6 متر. ينظر إليها شخص على الأرض. ولكي تتحقق أحسن رؤية يجب أن تكون الزاوية بين الشعاعين من العين لقمة وقاع اللوحة (θ) أكبر ما يمكن. أوجد هذه الزاوية القصوى وبعد الشخص عن قاع العمود عندئذ.



شكل (139)

(المسافة x) شكل (139)

8) أوجد القيم القصوى للمقدار z إذا كان:

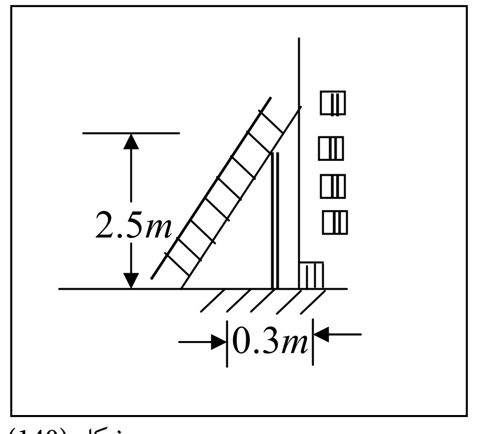
أ- $z = xy$ ، $y + u = 10$

ب- $z = 4y + x^2$ ، $(x^2 + 1)y = 324$

جـ- $z = x^2 + y^2$ ، $x - y = 40$

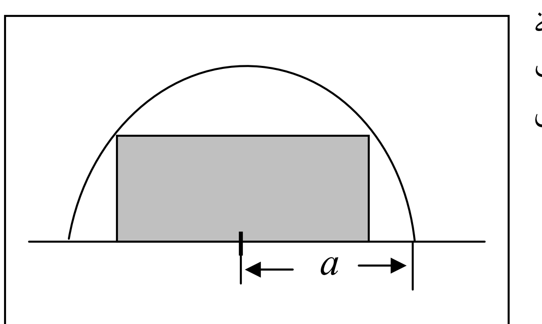
9) يراد صناعة صندوق مربع القاعدة بغطاء حجمه 100سم^3 بحيث تكون مساحة الرقيقة المستخدمة في التصنيع أصغر ما يمكن. أوجد أبعاد هذا الصندوق.

10) سور ارتفاعه 2.5 متر مبني عمودي على أرض أفقية ويوازي واجهة منزل ويبعد عنها مسافة 0.3 متر. كما بشكل (140). أوجد السلم ذا أقل طول الذي يمكن أن يستند على الأرض والسور والمنزل.



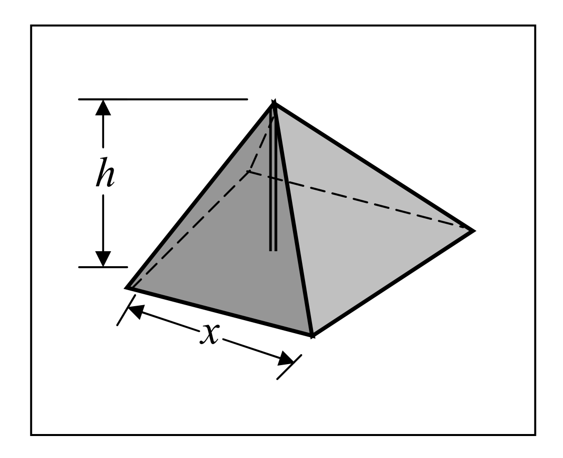
شكل (140)

11) أوجد بعدي مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها a، شرط وقوع أحد حوافه على قطر النصف دائرة. شكل (141)



شكل (141)

12) خيمة على شكل هرم منتظم مربع القاعدة إذا كان مساحة القماش المستغل في صناعة الأوجه المثلثة الأربعة هي S، x طول ضلع القاعدة. أثبت ان حجمها أكبر ما يمكن عندما $x=\sqrt{2}h$، حيث h ارتفاعها. شكل (142)



شكل (142)

بند (6-2): تطبيقات اقتصادية واجتماعية وعلوم الحياة

إن التغير هو خاصية تحكم معظم المنظومات الطبيعية والمنظومات الاجتماعية، ويعطينا الحسبان أحسن الطرق لدراسة هذه المنظومات. وسنحاول هنا إعطاء صورة لبعض تطبيقات المشتقة لعلوم الاجتماع وعلوم الحياة.

أ- في الاقتصاد

إن الدخل والربح مثلا يعتمدان على تأرجح التكاليف و الأسعار والتي بدورها تعتمد على تغيرات العرض والطلب.

والاقتصاد هو ما يحاول حل مسائل القيم المفضلة التي توفر الاستخدام الفضل للموارد.

مثال (7):

مصنع ينتج سلعة تكلفة القطعة منها 12 دينار وعليه تكاليف شهرية ثابتة قدرها 10000 دينار. إذا كان ثمن بيع القطعة 20 دينار. ما هو عدد القطع الواجب إنتاجها شهرياً حتى يضمن عدم الخسارة.

الحــل

$$C(x) = 10000 + 12x$$, التكاليف الكلية

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = 12 + \frac{10000}{x}$$, متوسط تكلفة القطعة

$$R(x) = 20x$$, العائد الشهري

$$P(x) = R(x) - C(x)$$, الربح الشهري

$$= 20x - (10000 + 12x)$$

تكون المنظومة كيت " break-even "، أي بدون خسارة عندما ينعدم الربح،

$$P(x) = 0$$

أي عندما
$$8x - 10000 = 0$$
$$x = 1250$$

∴ إنتاج 1250 قطعة لا ينجم عنه خسارة ولكن بدون ربح.

وعموماً إذا كان x عدد الوحدات المنتجة، فإن الاقتصاديين يستعملون الدوال C، c، R، P المعرفة على النحو التالي،

1) دالة التكلفة: سعر تكلفة x من الوحدات $= C(x)$

2) دالة متوسط التكلفة: $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

= متوسط تكلفة الوحدة

3) دالة العائد: العائد عن بيع x من الوحدات $= R(x)$

4) دالة الربح: $P(x) = R(x) - C(x)$

= أرباح بيع x من الوحدات

وإذا كانت f هي أحد الدوال السابقة فإن هامش القيمة المناظرة هو f'. أي أن C'، c'، R'، P' هي دالة هامش التكلفة ودالة متوسط التكلفة ودالة هامش العائد ودالة هامش الربح على الترتيب. أي أن C' هي معدل تغير التكلفة بالنسبة لعدد الوحدات المنتجة وهكذا.

مثال (8):

توصلت شركة أن تكلفة إنتاج x من الوحدات يعطى بالعلاقة. (بالدينار)،
$$C(x) = 200 + 0.05x + 0.0001x^2$$

أ- أوجد تكلفة ومتوسط التكلفة وهامش التكلفة لإنتاج 500 وحدة ولإنتاج 5000 وحدة.

ب- قارن هامش التكلفة عند إنتاج 1000 وحدة بنظيره عند إنتاج 1001 وحدة.

الحــل

$$C(x)=200+0.05x+0.0001x^2$$

$$C(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{200}{x}+0.05+0.0001x$$

$$C'(x)=0.05+0.0002x$$ هامش التكلفة

أ- عندما $x=500$

$$C(x)=250\ ,\ c(x)=0.5\ ,\ C'(x)=0.15$$

وعندما $x=5000$

$$C(x)=2950\ ,\ c(x)=0.59\ ,\ C'(x)=1.05$$

ب- عندما $x=1000$

$$C(x)=350\ ,\ c(x)=0.35\ ,\ C'(x)=0.25$$

عندما $x=1001$

$$C(x)=350.25$$

الفرق في $C(x)$

$$C(1001)-C(1000)=0.25$$

ولكن

$$C'(1000)=0.25$$

أي أن

$$C(1001)-C(1000)=C'(1000)$$

إذا كان عدد الوحدات المباعة x عندما يكون سعر البيع هو $P(x)$. أي أن $P(x)$ هو ثمن السلعة عندما يكون الطلب هو x من الوحدات.

$P(x)$ تسمى دالة الطلب، ويكون العائد عندئذ، $R(x)=xP(x)$

$P'(x)$ يسمى هامش دالة الطلب.

وحيث أن نقصان $P(x)$ يصاحبه عادة زيادة عدد السلع المباعة x. أي أن $P(x)$ هي دالة متناقصة.

أي أن $P'(x) < 0$ لكل x. عادة نرمز لـ $P(x)$ بالرمز S وعادة ما تكون S، x معرفتان من خلال دالة ضمنية.

مثال (9):

الطلب لـ x وحدة يرتبط بسعر بيع القطعة S تبعاً للعلاقة $2x + S^2 - 12000 = 0$. أوجد دالة الطلاب ودالة هامش الطلب ودالة العائد وهامش العائد. أوجد x من أجل أكبر عائد ممكن وأوجد هذا العائد.

الحـــل

أ) $2x + S^2 - 12000 = 0$

دالة الطلب، $P(x) = S = \sqrt{12000 - 2x}$

، $R(x) = xP(x)$

دالة العائد، $= x\sqrt{12000 - 2x}$

هامش الطلب، $P'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{12000 - 2x}}$

هامش العائد، $R'(x) = \dfrac{12000 - 3x}{\sqrt{12000 - 2x}}$

أكبر عائد عندما $R'(x) = 0$

$12000 - 3x = 0$

إذن يوجد عدد حرج هو،

$x = 4000$

ولما كانت $R'(x)$ موجبة لما $0 \le x < 4000$ وسالبة لما

$4000 < x < 6000$

$\therefore$ عند $x = 4000$ يوجد نهاية عظمى للعائد، هي

دينار $R_{\max} = R(4000) = 253000$

مثال (10)

اكتشفت شركة إلكترونات أن تكلفة إنتاج x آلة حاسبة في اليوم هي (بالدينار).

$$C(x) = 400 + 5x + 0.03x^2$$

إذا بيع كل آلة حاسبة بمبلغ $20 \ D.L$ أوجد،الإنتاج اليومي الذي يؤدي لأعلى ربح.

الحــل

$$\text{سعر التكلفة} = C(x) = 400 + 5x + 0.03x^2$$

$$\text{سعر البيع} = 20x = R(x)$$

$$\text{الربح اليومي} = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= 15x - 400 - 0.03x^2$$

وتكون $P(x)$ عظمى عندما

$$P'(x) = 0$$

$$= 15 - 0.06x = 0$$

$$x = 250 \quad \text{Calculators}$$

ويلاحظ أن، $P''(x) = -0.06$

$\therefore$ عند العدد الحرج $x = 250$ توجد فعلا نهاية عظمى،

$$P_{\max} = P(250)$$

$$= 1{,}475 \ D.L$$

ب - في العلوم الاجتماعية والجغرافية

يدرس كل من الاجتماعيين والجغرافيين ظاهرة الانتشار الاجتماعي Social diffusion، أي انتشار معلومة معينة، أو اختراع تكنولوجي أو بدعة ما عبر السكان. إن أفراد المجتمع يمكن أن ينقسموا إلى هؤلاء الذين يعرفون المجموعة والآخرين اللذين لا يعرفنها.

ومعدل الانتشار يتناسب مع عدد الأفراد اللذين يملكون المعلومة وعدد الأفراد اللذين مازالوا لم تصلهم.

إذا كان x هو عدد الأفراد المالكين للمعلومة، وعدد السكان هو N، وكان معدل الانتشار هو $r(x)$، $r(x)=\dot{x}$ فإن،

$$r(x) \propto x(N-x)$$

أو

$$r(x) = kx(N-x)$$

حيث k ثابت التناسب. ويبلغ هذا المعدل أقصى قيمة عندما $r'(x)=0$ أي $x=\dfrac{N}{2}$.

أيْ أن معدل انتشار المعلومة يتزايد حتى يصبح نصف الناس على علم بها ثم يبدأ في النقصان.

جـ - في علم الأوبئة:

نفس مبدأ انتشار المعلومة ينطبق على كيفية انتشار الأمراض المعدية. إذا كان S عدد المرضى، ℓ عدد اللذين مازال المرض لم يصلهم، N عدد السكان. فإن

$$\frac{ds}{dt} = -ks(t)\ell(t)$$

ولكن

$$\ell(t) = N - s(t)$$

لذلك

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta s\ell \\ &= -\beta s(N - s)\end{aligned}$$

د- في علم البيئة :

إذا فرضنا بيئة بسيطة بها عينتان من الحيوانات، أحدهما يفترس الآخر ولتصوير هذا النموذج تصور ثعالب مفترسة تفترس أرانب.

الأرانب تعيش على البرسيم وهو متوفر ولكن الثعالب لها إلا الأرانب كغذاء. فإذا كان $R(t)$ ، $F(t)$ هو تعداد الأرانب والثعالب على الترتيب عند لحظة t.

نجد أنه إذا لم يكن هناك ثعالب أيْ $F(t) = 0$ فإن دالة النمو للأرانب،

$$R'(t) = aR(t)$$

حيث a مقدار ثابت.

أيْ أن نسبة تزايد الأرانب R'/R ثابتة وتساوي a.

أما إذا لم يكن هناك أرانب أيْ $R(t) = 0$ فإن الثعالب تكون في تناقص مستمر

$$F'(t) = -nF(t)$$

، n مقدار ثابت، أيْ أن الثعالب ستواجه تناقص مستمر بنسبة ثابتة $-n = \dfrac{F'(t)}{F(t)}$.

ولكن الحالة الهامة ولأكثر إثارة هي عند وجود النوعين.

فإن معادلتي النمو يحتويان على الجداء $R(t)F(t)$. لأن عدد مرات قتل الأرانب بواسطة الثعالب يتناسب مع عدد مرات المواجهة بينهما، الذي بدوره يتناسب مع كل من $R(t)$ و $F(t)$ أيْ مع $F(t)R(t)$. وكل عملية قتل تقلل عدد الأرانب $R(t)$ ويقلل من قابلية نمو الثعالب أيْ أن،

$$R'(t) = R(t)(a - bF(t))$$
$$F'(t) = F(t)(mR(t) - n)$$

حيث m، b ثوابت.

وبما أن $0 < R(t)$ ، $F(t) > 0$ فإن إشارتي $R'(t)$، $F'(t)$ مثل إشارتي $a - bF(t)$ و $mR(t) - n$ على الترتيب.

ويحدث استقرار عندما $R'(t) = 0$، $F'(t) = 0$

أيْ عندما،

$$R(t) = \frac{n}{m}\text{،}\ F(t) = \frac{a}{b}$$

تمارين 6-2

1) تتوقع شركة معدات إلكترونية أن تكلفة x من الآلات الحاسبة يومياً هي

$$C(x)=500+6x+0.02x^2$$

إذا بيع كل آلة حاسبة بسعر 18 دينار. أوجد :

أ) دالة العائد.

ب) دالة الربح.

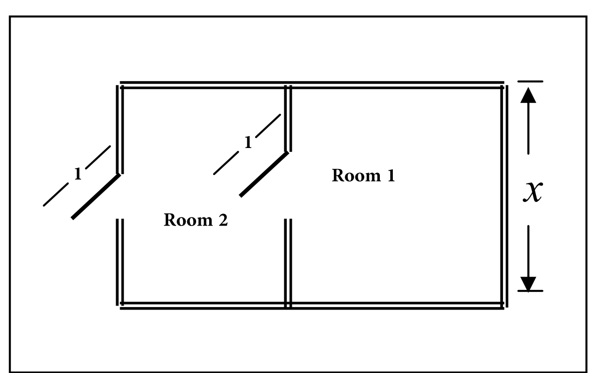
ج) الإنتاج اليومي اللازم لجعل الربح أكبر ما يمكن.

د) النهاية العظمى للربح اليومي.

2) مكتب يتكون من حجرتين ومساحته الكلية 100 متر مربع. يوجد بابان أحدهما بين الحجرتين والآخر باب الخروج. كما بالشكل. عرض كل باب 1 متر. إذا كانت تكاليف دهان المتر الطولي من الحائط هي 10 دينار (مع حذف الأبواب) اثبت أن تكاليف دهان الحوائط $C(x)$ حيث x عرض المكتب هي

$$C(x)=10+\left(3x-2+\frac{200}{x}\right)$$

أوجد الخطين التقاربيين الرأسي والمائل وارسم بيان $C(x)$ لكل $x>0$ أوجد التصميم الذي يقلل التكاليف لأدنى حد.



شكل (143)

3) في علم الكيمياء الحيوية تعطى الاستجابة الحدية العامة بالمنحنى

$$R = ks^n / \left(s^n + a^n\right)$$

حيث R هي الاستجابة الكيميائية المناظرة للتركيز S من مادة كل من k، n، a ثوابت موجبة. ومثال على ذلك هو المعدل R الذي يزيل به الكبد الكحول من تيار الدم عندما يكون تركيز الكحول S.

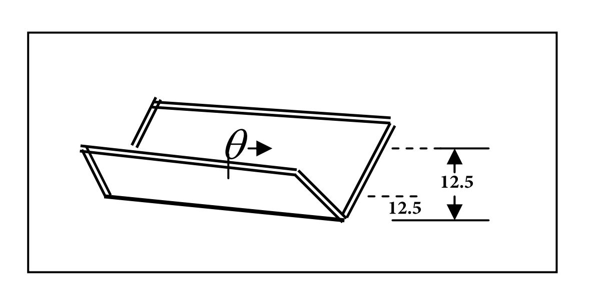
وضح أن R دالة تزايدية في S وأن $R = k$ هو خط تقاربي أفقي للمنحنى.

4) صانع أفران ميكرويف يعين تكاليف إنتاج x من الأفران من المعادلة

$$C(x) = 4000 + 100x + 0.05x^2 + 0.0002x^3$$

قارن هامش تكاليف إنتاج 100 فرن بتكاليف إنتاج الفرن رقم 101.

5) مجرى مائي للصرف مقطعه على شكل حرف V يصنع من ألواح معدنية عرضها 25 سم أوجد زاوية الرأس بين جانبي المجرى التي سوف تجعل كمية الماء التي يحملها أكبر ما يمكن.



شكل (144)

بند (3-6): تطبيقات في الديناميكا.

نستعمل في هذا البند المشتقات لوصف وتحليل أنواع مختلفة من الحركة، فغالبا ما ساعد الحسبان في دراسة الأجسام المتحركة وسوف نكتفي هنا بحركة الأشياء في خط مستقيم. حيث سوف نعتبر أي جسم متحرك، كبيرا كالسيارة والقطار أو صغيرا مثل إلكترون متحرك، كأنه نقطة P والطريق الذي تتحرك فيه هذه النقطة كمستقيم ℓ. فإذا كان إحداثي النقطة P على هذا الخط عند زمن t هو $s(t)$، فإن $s(t)$ تسمى دالة الموضع للنقطة P. إذا كان ℓ رأسيا فإن $s(t)$ تستبدل $y(t)$ وإذا كان ℓ أفقيا استبدلت $s(t)$ بـ $x(t)$. وسرعة النقطة P هي معدل تغير $s(t)$ بالنسبة للزمن، $\dot{s}(t)$، ويرمز لها بالرمز $v(t)$.

$$\text{السرعة} = v(t) = \dot{s}(t)$$

وتسمى $v(t)$ دالة السرعة، وإذا كانت $v(t)$ موجبة على فترة معينة فإن $0 < \dot{s}(t)$ أيْ أن $s(t)$ متزايدة وتتحرك نقطة P في الاتجاه الموجب للمستقيم ℓ. أما إذا كانت $v(t)$ سالبة فإن $\dot{s}(t) < 0$، $s(t)$ متناقصة فتتحرك P في الاتجاه السالب وتكون $v(t) = 0$، عندما تغير P اتجاه حركتها. أما مقدار السرعة بصرف النظر عن إشارتها أيْ $|v(t)|$ فيسمى "الإرقال speed" أو حتى يسمى مقدار السرعة كما هو.

العجلة $a(t)$ للنقطة P عند زمن t هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن.

$$\text{العجلة} = a(t) = \dot{v}(t)$$

أو

$$a(t) = \ddot{s}(t)$$

تسمى $a(t)$ دالة العجلة. ويمكننا إعادة كتابة $v(t)$، $a(t)$ على النحو،

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad , \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

وتكون العجلة موجبة عندما تكون السرعة متزايدة وعندئذ تسمى تزايد وتكون سالبة عندما تكون السرعة متناقصة وعندئذ تسمى تقصير،

$a(t)$ تسمى تزايد أو تعجيل $\Rightarrow$ $a(t)>0$

$a(t)$ تسمى تقصير أو تباطؤ $\Rightarrow$ $a(t)<0$

عندما تكون السرعة قصوى $\Rightarrow$ $a(t)=0$

مثال (11):

تتحرك نقطة P في خط مستقيم بحيث تعطى دالة الموضع s بالعلاقة،

$$s(t)=t^3-15t^2+63t+10$$

أوصف الحركة أثناء الفترة $[1,9]$. وأوجد إزاحة الجسم في هذه الفترة والمسافة الفعلية التي تحركها.

الحـل

بالتفاضل، نحصل على،

$$v(t)=\dot{s}(t)=3t^2-30t+63$$
$$a(t)=\dot{v}(t)=6t-30$$

نجد أن $v(t)=0$ عندما

$$3t^2-30t+63=0$$
$$t^2-10t+21=0$$
$$(t-3)(t-7)=0$$

أيْ عندما $t=3$، $t=7$

أيْ أن الجسم غير اتجاه حركته مرتان عند $t=3$، عند $t=7$

وببحث إشارة $v(t)$، على الفترات الجزئية $(7,9)$, $(3,7)$, $(1,3)$

نجد السرعة تغيرت إشارتها من + , - , + على الترتيب

أي أن الجسم تحرك إلى اليمين من $t=1$ إلى $t=3$ ثم إلى اليسار من $t=3$ إلى $t=7$ وأخيرا إلى اليمين من $t=7$ إلى $t=9$.

المواضع $s(1)$، $s(3)$، $s(7)$، $s(9)$ هي كما يلي:

$s(1)=59$، $s(3)=91$، $s(7)=59$، $s(9)=91$

أزيح الجسم في هذه الفترة من $s(1)$ إلى $s(9)$ أيْ الإزاحة الناتجة هي $s(9)-s(1)$

$D_{19}=$ الإزاحة $\quad s_{1-9}=91-95=32$

أيْ أزيح الجسم يمينا مسافة 32.

ولكن الواقع أن الجسم تحرك من $s(1)$ إلى $s(3)$ لليمين

ثم تحرك من $s(3)$ إلى $s(7)$ إلى اليسار

ثم من $s(7)$ إلى $s(9)$ إلى اليمين

يمينـا، $D_{13}=s(3)-s(1)=32$

يسارا، $D_{37}=s(7)-s(3)=-32$

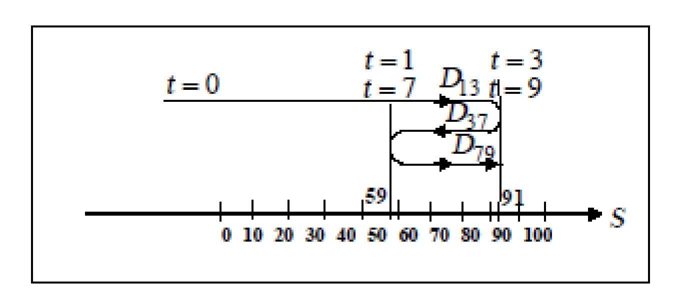
ثم

يمينا، $D_{79}=s(9)-s(7)=32$

متر $d_{19}=|D_{13}|+|D_{37}|+|D_{79}|=96$ المسافة الفعلية

لاحظ أن الإزاحة الكلية

متر $D_{19}=D_{13}+D_{37}+D_{79}=32$ (أنظر شكل (145))



شكل (145)

مثال (12):

قذف صاروخ رأسيا إلى أعلى بسرعة $140\ m/s$ فوجد أن المسافة الرأسية فوق سطح الأرض بعد زمن t ثانية هي بالمتر، y ،

$$y(t) = 140t - 4.9t^2$$

أ – أوجد الزمن والسرعة عندما يصل الصاروخ للأرض.

ب – أوجد أقصى ارتفاع للصاروخ عن سطح الأرض.

ج – أوجد العجلة عند أيْ لحظة زمنية t.

الحــل

أ- يتحرك الصاروخ على محور y ، ونقطة الأصل على الأرض. وسنعتبر الصاروخ كجسيم صغير

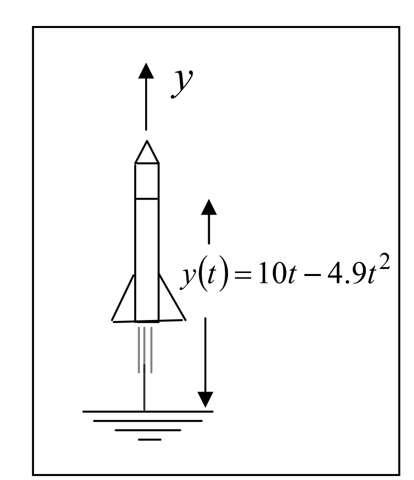
يكون الجسيم على الأرض عندما $y(t) = 0$

أي

$$140t - 4.9t^2 = 0$$

$$t(140 - 4.9t) = 0$$

أي عند اللحظتين



$t = 0$ ، $t = 28.57s$

$t = 0$ هي لحظة الإطلاق، $t = 28.57s$

هي لحظة وصول الصاروخ مرة أخرى للأرض. والسرعة التي يطرق بها الأرض

شكل (146)

هي إذن، $v(28.57)$

ولكن

$$v(t) = \dot{y}(t) = 140 - 9.8t$$

إذن،

$$v(28.57) = -140\ m/s$$

والإشارة السالبة تعني أن الصاروخ عندئذ متحرك إلى أسفل.

نلاحظ أن سرعة الإطلاق وسرعة الوصول متساويتي الأرقال.

$$|v(0)| = |v(28.57)| = 140\ m/s$$

ب- أقصى ارتفاع، $y_{\max}$ يحدث عندما $\dot{y}=0$ أي $v=0$،

$$140-9.8t=0$$

أي عند، $t=\dfrac{100}{7} \Rightarrow t=14.29s$

ولذلك أقصى ارتفاع هو

$$\begin{aligned} y_{\max} &= y(14.29) \\ &= 140\left(\frac{100}{7}\right)-4.9\left(\frac{100}{7}\right)^2 \\ &= 1000 \ \ m \end{aligned}$$

جـ- $o(t)=\dot{v}(t)=-9.8\,m/s$

وهي عجلة ثابتة ناتجة عن قوة جذب الأرض للأجسام.

<u>الحركة التوافقية البسيطة Simple harmonic motion (S.H.M)</u>

يقال لنقطة P متحركة على مستقيم ℓ أنها في حركة توافقية بسيطة إذا كان إزاحتها عن نقطة الأصل $s(t)$ معطاة بإحدى العلاقتين

$$s(t)=A\sin(\omega t+\phi) \quad \text{أو} \quad s(t)=A\cos(\omega t+\phi)$$

حيث A ، ω، ϕ ثوابت.

وفي هذه الحالة

$$\dot{s}(t)=\omega A\cos(\omega t+\phi) \quad \text{أو} \quad \dot{s}(t)=-A\omega\sin(\omega t+\phi)$$

$$\ddot{s}(t)=-\omega^2A\sin(\omega t+\phi) \quad \text{أو} \quad \ddot{s}(t)=-\omega^2A\cos(\omega t+\phi)$$

أي

$$\ddot{s}(t)=-\omega^2 s(t) \quad \text{أو} \quad \ddot{s}(t)=-\omega^2 s(t)$$

أي أن كلا الحالتين أدت إلى أن العجلة،

$$a(t) = -\omega^2 s(t)$$

وهذه العلاقة أيضاً تعرف الحركة التوافقية البسيطة. فالحركة التوافقية البسيطة هي إذن حركة جسيم بعجلة مقدارها يتناسب طرديا مع مقدار s ودائماً إشارتها مخالفة لإشارة s.

وفي الحركة التوافقية البسيطة تتذبذب P بين نقطتين على ℓ.

إحداثياهما $+A$، $-A$. ولذلك فإن سعة الذبذبة هي أكبر إزاحة عن نقطة الأصل $|A|$. وزمن الذبذبة هو $\frac{2\pi}{\omega}$ أما عدد الذبذبات كل ثانية أو ما نسميه التردد فهو $\frac{\omega}{2\pi}$.

تسمى الزاوية ϕ زاوية الطور.

وبما أن عندما،

$$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \text{ ،} \quad s(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

ومن حساب المثلثات،

$$\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1$$

نحصل على

$$\frac{s^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

ومنها

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - s^2}$$

السرعة أكبر ما يمكن عندما $s = 0$ والعجلة $= 0$ بينما $v = 0$ عندما $s = A$،

$$a = -\omega^2 A$$

مثال (13):

يتحرك جسيم على خط مستقيم حركة توافقية بسيطة بين الموصفين $s = 2m$، $s = 10m$ فبلغت أقصى سرعة له $50\, m/s$. أوجد سعة الذبذبة، التردد والزمن الدوري وأقصى عجلة له. أين ومتى تصبح سرعته لأول مرة $25\, m/s$. علماً بأن بدء الحركة عند $s = 2m$.

الحــل

$$\text{سعة الذبذبة} = \frac{10-2}{2} = 4m = A$$

$$\text{أقصى سرعة} = \omega A$$

$$50 = \omega 4 \Rightarrow \omega = 12.5 \ rad/s$$ [1]

$$\text{الزمن الدوري} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{12.5} = 0.503s$$

نفرض أن

$$u = A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$u = 4\sin(12.5t + \varphi)$$

حيث u الإزاحة بالنسبة لمركز الحركة التوافقية البسيطة وهي نقطة التنصيف بين $s = 2$، $s = 10$ أي عند $s = 6$ فيكون موضع الجسيم عند أي لحظة هو

$$S = 6 + 4\sin(12.5t + \varphi)$$

بوضع $t = 0$، $s = 2$

$$S = 6 + 4\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow S = 6 - 4\cos 12.5t$$
$$v(t) = \dot{s} = 50\sin 12.5t$$

---

(1) rad/s تعني $radian/\sec ond$ أي زاوية نصف قطرية/ ثانية.

بوضع $v = 25\, m/s$ نجد أن،

$$25 = 50\sin(12.5t)$$
$$\sin(12.5t) = \frac{1}{2}$$
$$12.5t = \frac{\pi}{6}$$
$$t = \frac{\pi}{75}\, s$$

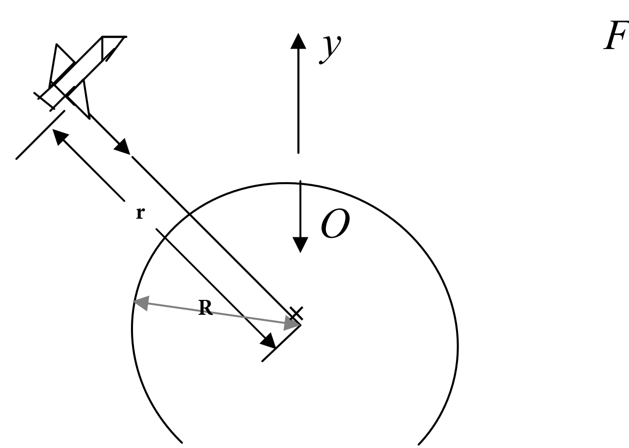
وعندئذ،

$$S = 6 - 4\cos\frac{\pi}{6}$$
$$= 6 - 4\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$S = 6 - 2\sqrt{3}$$
$$S \approx 2.536 \;\; m$$

السقوط الحر Free Fall

تبعاً لقانون نيوتن للجذب العام فإنه أية كتلة m تنجذب نحو مركز الأرض بقوة تتناسب مع كل من m وكتلة الأرض M وعكسياً مع مربع المسافة من m إلى مركز الأرض، r،

$$F = G\frac{m\mathrm{M}}{r^2}$$



شكل (147)

وينص قانون نيوتن الثاني على أن حاصل ضرب الكتلة m وعجلة حركتها نحو مركز الأرض يساوي القوة المسببة للحركة. أي أن

$$F = ma(t) = \frac{Gm\text{M}}{r^2}$$

$$a(t) = \frac{G \cdot \text{M}}{r^2}$$

بوضع $r = R + y$ حيث R نصف قطر الأرض، y ارتفاع الجسم عن سطح الأرض فإن،

$$a(t) = \frac{G \cdot \text{M}}{(R + y)^2}$$

وعندما يكون الجسيم على سطح الأرض، $y = 0$ ، فإن

$$a(t)\Big|_{y=0} = \frac{G \cdot \text{M}}{R^2} = g$$

وبالتعويض عن ثابت الجذب العام G، ونصف قطر الأرض R وكتلتها M نجد أن

$$g \approx 9.8\, m/s^2$$

وتصبح العجلة عند أي ارتفاع هي

$$a(t) = g\left(\frac{R}{R + y}\right)^2$$

ولجميع الأجسام سواء على سطح الأرض أو بالقرب من سطح الأرض حيث ($y << R$) تكون،

$$a(t) = g$$

وهي عجلة ثابتة تسمى عجلة الجاذبية الأرضية متجهة دائماً لأسفل نحو مركز الأرض. فإذا اعتبرنا محور الإحداثيات بنقط أصل عند سطح الكوكب واتجاهه الموجب لأعلى فإن العجلة تكون سالبة

أي $$a(t)=-g$$

وحيث أن $a(t)=v'(t)$ فإن دالة السرعة يجب أن تكون على الصورة

$$v(t)=-gt+c$$

إذا اعتبرنا السرعة الابتدائية v_0 عندما، $t=0$ فإن

$$v_0=0+c$$

$$v(t)=v_0-gt$$

ودالة الموضع التي لو فاضلناها أعطت هذه السرعة يجب أن تكون على الصورة

$$y(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2+c$$

فإذا بدأ الجسيم حركته عندما كانت $y(0)=y_0$ ، $t=0$ فإن

$$y_0=0-0+c$$

وبالتالي

$$y(t)=y_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

وهذه الدالة تعطي موضع جسيم ساقطاً بحرية تحت تأثير الجاذبية فقط. فإذا ترك جسيم يسقط بحرية من ارتفاع 10 متر مثلاً. فإن،

$$y(t)=10+10-\frac{1}{2}9.8t^2$$

$$y(t)=10-4.9t^2$$

أي أن ارتفاعه أثناء السقوط يتناقص حتى يصبح صفرا (يرتطم بالأرض) عندما،

$$y(t)=0$$

$$10-4.9t^2=0$$

$$t=2.04s$$

مثال (14):

قذف جسيم من قمة برج ارتفاعه 100 متر رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية $50 m/s$. متى يصل إلى الأرض.

الحــل

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$g = 9.8 \text{ ، } y_0 = 100 \text{ ، } v_0 = 50 m/s$$

$$y(t) = 9.8 + 50t - 4.9t^2$$

وعندما يصل للأرض، أي عندما $y(t) = 0$

يكون

$$9.8 + 50t - 4.9t^2 = 0$$
$$4.9t^2 - 50t - 9.8 = 0$$
$$49t^2 - 500t - 98 = 0$$
$$t = \frac{500 \pm \sqrt{500^2 + 4 \times 49 \times 98}}{98}$$
$$t = 10.4s$$

مثال (15):

يتحرك جسيم في خط مستقيم رأسي بحيث يعطي ارتفاعه عند أي لحظة $t(s)$ بالمتر، y، على النحو

$$y(t) = 2t + 3\left(t^3 + \frac{152}{3t}\right)$$

متى تنعدم سرعته وعلى أي ارتفاع ؟ أوجد العجلة عند منتصف هذا الزمن.

الحــل

$$v(t) = \dot{y}(t)$$

$$v(t) = 2 + 3\left(3t^2 - \frac{152}{3t^2}\right)$$

وتنعدم السرعة عندما $v(t) = 0$، أي

$$0 = 2 + 3\left(3t^2 - \frac{152}{3t^2}\right)$$

نضع $3t^2 = u$

$$0 = 2 + 3\left(u - \frac{152}{u}\right)$$

$$0 = 2u + 3u^2 - 456$$

$$3u^2 + 2u - 456 = 0$$

$$(u - 12)(3u + 38) = 0$$

$$u = 12 \ , \ u = -\frac{38}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3t^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad t = 2s$$

$\therefore$ تنعدم سرعته بعد 2 ثانية. وعندئذ يكون،

$$y(t) = 2(2) + 3\left(2^3 + \frac{152}{3 \times 2}\right)$$

$$= 4 + 3\left(8 + 25\frac{1}{3}\right)$$

$$= 4 + 24 + 76$$

$$= 94m$$

$\therefore$ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم هو 94 مترا.

أما العجلة،

$$a(t) = \dot{y}(t)$$

$$= 3\left(6t + \frac{304}{3t^3}\right)$$

$$= 18t + \frac{304}{t^3}$$

والعجلة عند منتصف زمن الصعود، أي عند $t = 1s$ هي

$$a(1) = 18(1) + \frac{304}{(1)^3}$$

$$= 322\, m/s^2$$

مثال (16):

يتحرك جسيم في خط مستقيم ويتحدد الموضع $s(t)$ عند t ثانية بالعلاقة،

$$s(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

اشرح حركة الجسيم منذ أن مر بنقطة الأصل عندما $t = 0$ إلى $t \to \infty$. أين يكون الجسيم عندما $t = 1000s$ ؟ ضمن الشرح شكل وقيمة الموضع والسرعة والعجلة، وارسم بيانات تغيرهم مع الزمن.

الحــل

$$v(t) = \dot{s}(t) = \frac{\left(1+t^2\right)(2) - 2t(2t)}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$v(t) = \frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{\left(1+t^2\right)^2(-4t) - \left(2-2t^2\right)2\left(1+t^2\right)(2t)}{\left(1+t^2\right)^4}$$

$$= \frac{-4t\left(1+t^2\right)\left[1+t^2+2-2t^2\right]}{\left(1+t^2\right)^3}$$

$$= \frac{4t\left(t^2-3\right)}{\left(1+t^2\right)^3}$$

تنعدم السرعة عندما، $v(t)=0$

$$2-2t^2=0 \quad \Rightarrow \; t=1s$$

وتكون عندئذ،

$$s(1)=1m$$

وعند هذه اللحظة يغير الجسيم اتجاه حركته.

ولكن متى يعود إلى نقطة الأصل ؟ يعود عندما $s=0$

$$\frac{2t}{1+t^2}=0$$

والطرف الأيسر ينعدم في حالتين، أولاً لما، $t=0$ أي في بدء الحركة (حيث بدأ الحركة عند نقطة الأصل)

وعندما $t \to \infty$. أي أن الجسيم يعود بعد أن يكون قد قطع مسافة 1 متر في زمن 1 ثانية ولكنه لن يصل إلى نقطة الأصل إلا بعد زمن لا نهائي.

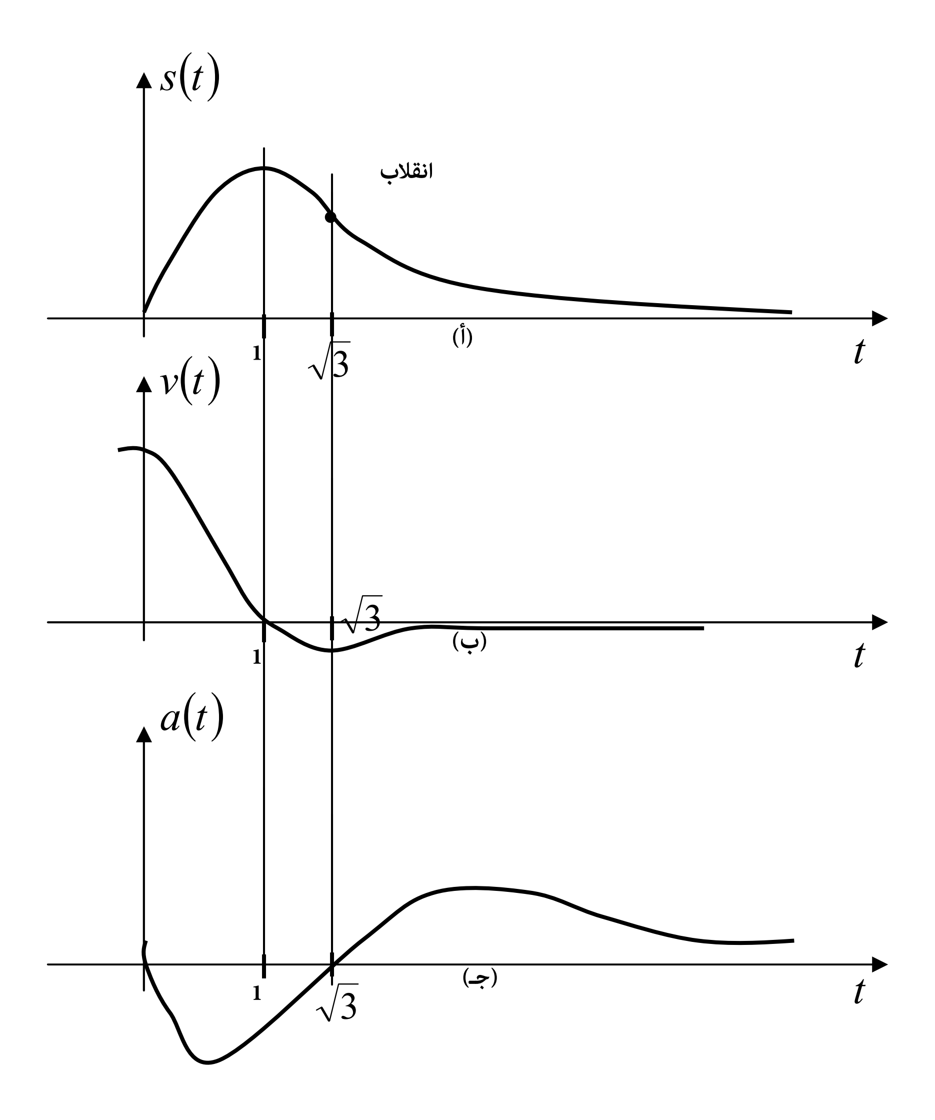
وبالرجوع للعجلة نجد أنها تنعدم عندما

$$t=0 \;\; , \;\; t=\sqrt{3} \;\; s$$

أي أن السرعة بلغت قيم قصوى عند بدء الحركة وعند $t=\sqrt{3}$ فنجدها كانت أكبر ما يمكن عند بدء الحركة ثم تناقصت حتى انعدمت عند $t=1s$ حيث غير الجسيم اتجاه حركته. ثم بدأت في التزايد في الاتجاه المعاكس (نحو اليسار) حتى بلغت قيمة عظمى عند $t=\sqrt{3} \;\; s$.

إذن عند $t=\sqrt{3}$ بدأت السرعة تتناقص وتحرك الجسيم بتقصير لم يمكنه من العودة إلى ($s=0$).

وبيانات العلاقات $s(t)$، $v(t)$، $a(t)$ موضحة في شكل (148)



شكل (148)

تمارين (3-6)

في التمارين من (1) إلى (11)، تتحرك نقطة في خط مستقيم وموضعها s. أوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة زمنية t. صف حركة النقطة في الفترة الزمنية المعطاة. وضح الحركة برسم من النوع الموضح في شكل (145).

1) $s(t) = 3t^2 - 12t + 4$ ، $[0,6]$

2) $s(t) = t^2 + 5t - 6$ ، $[0,3]$

3) $s(t) = t^2 + 3t - 6$ ، $[-2,2]$

4) $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ ، $[0,4]$

5) $s(t) = t^3 - 9t + 1$ ، $[-3,3]$

6) $s(t) = 10 - 36t + 15t^2 - 2t^3$ ، $[1,4]$

7) $s(t) = 12 + 6t - t^3$ ، $[-2,3]$

8) $s(t) = -2t^3 + 15t^2 + 24t - 6$ ، $[0,5]$

9) $s(t) = 2t^3 - 12t^2 + 6$ ، $[0,6]$

10) $s(t) = 2t^4 - 6t^2$ ، $[-2,2]$

11) $s(t) = 2t^3 - 3t^2$ ، $[0,2]$

في التمارين من (12) إلى (16)، تقطع نقطة متحركة على مستقيم المسافة $s(t)$ في زمن t وحدة. أوجد السرعة بعد 3 ثواني وأذكر في كل مرة متى تصبح السرعة k متر/ث^2.

12) $s(t) = 5t^2 + 2 \;,\; k = 28$

13) $s(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \;,\; k = 0$

14) $s(t) = 3t^2 + 7 \;,\; k = 88$

15) $s(t) = 5t^3 + 3t + 2 \;,\; k = 63$

16) $s(t) = \sqrt{16+t^2} \;,\; k = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

قذف جسيم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية u متر/ث وارتفاعه بالمتر عن سطح الأرض بعد t ثانية هو $Y(t)$. أوجد في كل التمارين من (17) إلى (19):

أ- السرعة والعجلة عند t ثانية.

ب- أقصى ارتفاع

جـ- فترة الرحلة

(17 $$s(t)=144t-16t^2 \ , \ u=144$$

(18 $$s(t)=100+192t-16t^2 \ , \ u=192$$

(19 $$s(t)=b-bt-at^3 \ , \ u=b$$

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة وموضعه عند زمن t هو $s(t)$ أوجد سعة الذبذبة وزمن الذبذبة والتردد (من 20 إلى 25)

(20 $$s(t)=8\sin \pi t$$

(21 $$s(t)=5\cos\frac{\pi}{4}t$$

(22 $$s(t)=3\cos 2t$$

(23 $$s(t)=6\sin\frac{2\pi}{3}t$$

(24 $$\dot{s}(t)=8\sqrt{16-s^2}$$

(25 $$\ddot{s}(t)=-16s \ ، \ \dot{s}_{\max}=20$$

26) التغيير السنوي في درجة الحرارة T (c^0) في ستاتن ايند يمكن تقريبه بالمعادلة

$$T=14.8\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)+10$$

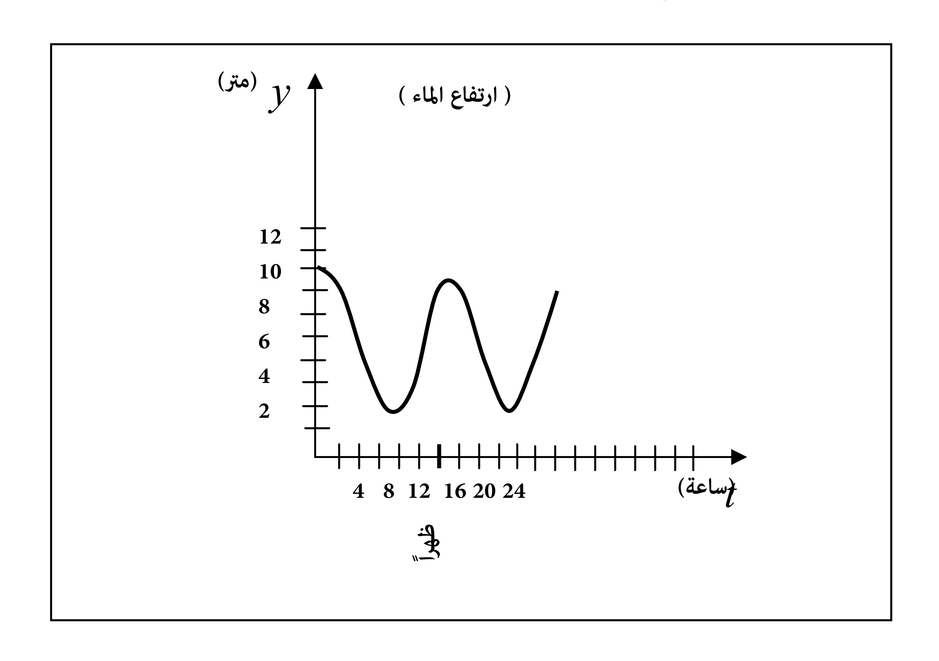
حيث t بالشهور، $t=0$ تناظر أول يناير. أوجد قيم تقريبية للمعدل الذي به درجة الحرارة في أول أبريل وفي أول نوفمبر. في أي من شهور السنة يكون تغير درجة الحرارة أسرع ما يمكن.

27) شكل (149) يوضح ارتفاع وانخفاض مستوى الماء في ميناء طرابلس خلال 24 ساعة معينة.

أ- قرب مستوى سطح الماء y بتعبير على شكل

$y = a\sin(bt + c) + d$، $t = 0$ تناظر منتصف الليل.

ب- أوجد سرعة ارتفاع سطح الماء عند الظهيرة. (الساعة 12 ظهرا).



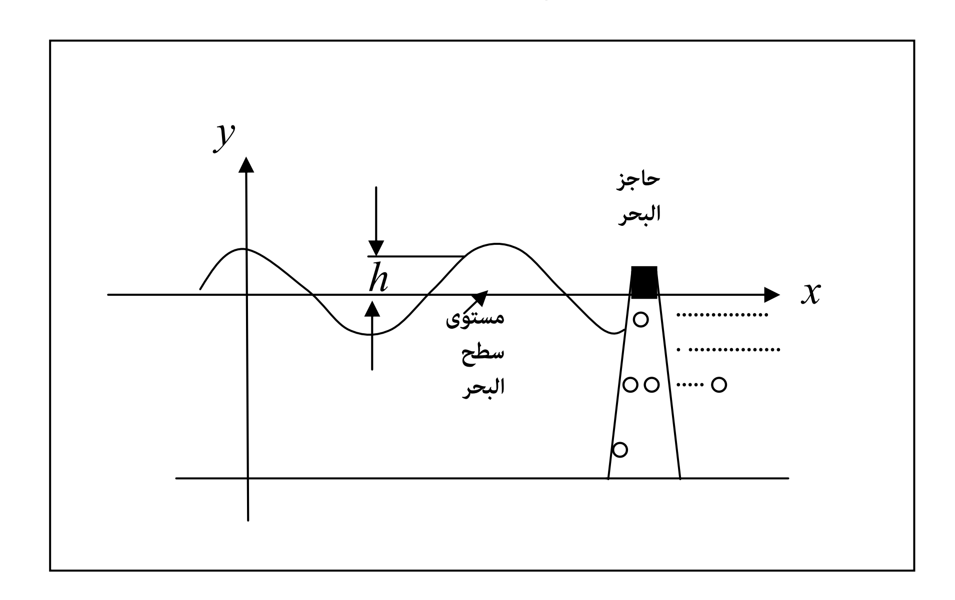
شكل (149)

28) السونامي هو موجة بحرية تنجم عن زلزال تحت سطح البحر مثل الذي حدث في شريط آسيا. هذه الموجات قد تصل لأكثر 100 قدم ارتفاعا وتنتشر بسرعات هائلة. يمثل المهندسين السونامي بمعادلة على شكل $y = a\cos bt$.

أفترض أن موجة ارتفاعها (قدم) $h = 25$ وزمنها الدوري 30 دقيقة تنتشر بسرعة 180 قدم/ثانية.

أ-   إذا كان (x, y) نقطة على الموجة المبينة في شكل (150). عبر   عن y كدالة في t علماً بأن $y = 25$ عندما $t = 0$.

ب- ما سرعة ارتفاع (أو هبوط) سطح الموجة عندما $y = 10\,ft$.



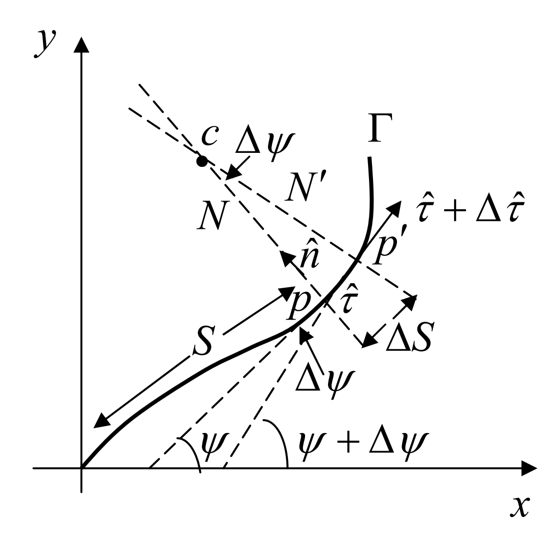
شكل (150)

بند (4-6): الانحناء CURVATURE

عندما تتحرك نقطة على منحنى Γ، قد يتغير اتجاهها بسرعة أو ببطء على حسب ما إذا كان Γ ينثني بجدية أو بالتدريج. ولقياس معدل انثناء أو تغير شكل المنحنى Γ، نستعمل مصطلح " الانحناء " أو " التقوس ".

وفي هذا البند سوف نعتبر وحدة المتجه المماس ووحدة المتجه العمودي على المنحنى اللذان سيكونا عوناً لمناقشتنا مبدأ الانحناء.

نفرض أن الجسيم كان عند لحظة معينة عند نقطة P. شكل (151) على المنحنى Γ وأن متجه الوحدة المماس عند هذه النقطة هو $\hat{\tau}$ يصنع زاوية ψ مع المحور x. وهو في نفس الوقت في اتجاه السرعة $\dot{s}(t)$ حيث $s(t)$ موضع الجسيم على المنحنى عندئذ. العمودي على المنحنى عند P نرمز له N ومتجه الوحدة في اتجاهه هو $\hat{n}$ ويصنع زاوية $\frac{\pi}{2}+\psi$ مع المحور x.



شكل (151)

بعد زمن قدره Δt انتقل الجسيم إلى P' تبعد P مسافة Δs على المنحنى ويصبح متجه الوحدة المماس عندئذ $\hat{\tau}'$ أو $\hat{\tau}+\Delta\hat{\tau}$ يصنع زاوية $\psi+\Delta\psi$ مع المحور x والعمودي عليه N' يصنع زاوية $\psi+\Delta\psi+\dfrac{\pi}{2}$ مع المحور x. يتقاطع العمودان مع بعضهما في نقطة c هي مركز الانحناء (التقوس) عند هذه النقطة P. ومن الشكل نجد أن

$$\Delta s = \rho \Delta t$$

حيث $\rho = cP \approx cP'$ هو نصف قطر الانحناء (التقوس).

إذن

$$\rho = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

أو

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}$$

أ- فإذا كان المنحنى Γ معرف بمعادلته الديكارتية. فإن من شكل (152) وهو يكبر المسافة من P إلى P'، نجد أن،

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

أو

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

كذلك $\tan\psi = \dfrac{dy}{dx}$

شكل (152)

بالتفاضل،

$$\sec^2\psi\,\frac{d\psi}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d\psi}{dx}\sec^2\psi=y''$$

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{y''}{1+\tan^2\psi}=\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)}$$

إذن

$$\rho=\frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\psi}{dx}}=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)}}$$

$$\rho=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

تعريف: الانحناء k للمنحنى Γ عند نقطة $P(x,y)$ هو

$$k=\frac{1}{\rho}=\frac{d\psi}{ds}$$

∴ الانحناء (التقوس) هو مقلوب نصف قطر الانحناء، إذن

$$k=\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ب- أما إذا كان المنحنى معرف بمعادلتين بارامتريتين

$x=x(t)$ ، $y=y(t)$ فإن

$$\Delta s^2=\Delta x^2+\Delta y^2$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

كذلك

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

$$\sec^2\psi\,\frac{d\psi}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt} = y''\dot{x}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{y''\dot{x}}{1+\tan^2\psi} = \frac{y''\dot{x}}{1+\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}$$

$$= \frac{y''\dot{x}^3}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \quad , \quad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

$$\rho = \frac{ds/dt}{d\psi/dt}$$

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)}}$$

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}$$

$$\frac{1}{\rho} = k = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

جـ- مركز الانحناء (مركز التقوس) نجد من شكل (153) أن الإحداثي X لنقط c، مركز لانحناء هو

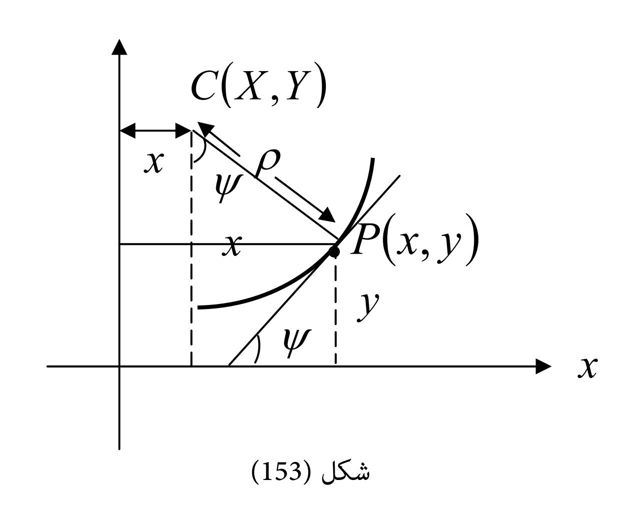
$$X = x - \rho \sin\psi$$

$$X = x - \frac{y'\left(1 + y'^2\right)}{y''}$$

كذلك،

$$Y = y + \rho \cos\psi$$

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$



شكل (153)

كذلك في الصورة البارمترية

نجد أن

$$X = x - \frac{\dot{y}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

$$Y = y + \frac{\dot{x}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

ومن الأبسط أن نكتفي بتذكر أن مركز الانحناء هو

$$c\left(x - \rho \sin\psi, y + \rho \cos\psi\right)$$

مثال (17):

منحنى Γ تمثله المعادلتان البارامتريتان $x = t^2$، $y = t^3$، $t \in R$. أوجد التقوس عند نقطة P بارامترها $t = 0.5$ وأوجد مركز ونصف قطر دائرة الانحناء عند $t = 0.5$ على رسمة واحدة.

الحــل

$$\dot{y}(0.5) = \frac{3}{4} \text{ ،} \dot{x}(0.5) = 1 \Leftarrow \dot{y}(t) = 3t^2 \text{ ،} \dot{x}(t) = 2t$$

$$\ddot{y}(0.5) = 3 \text{ ،} \ddot{x}(0.5) = 2 \Leftarrow \ddot{y}(t) = 6t \text{ ،} \ddot{x}(t) = 2$$

$$k=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1\times 3-\frac{3}{4}\times 2}{\left(1+\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3/2}{125/64}=\frac{96}{125}$$

$$\rho=\frac{1}{k}=\frac{125}{96}\approx 1.302$$

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\Rightarrow \dot{y}(0.5)=\frac{3}{4}$$

$$\tan\psi=\frac{3}{4}\Rightarrow \sin\psi=\frac{3}{5}\ ,\ \cos\psi=\frac{4}{5}$$

$$X=x-\rho\sin\psi$$

$$=0.25-\frac{125}{96}\cdot\frac{3}{5}$$

$$=0.25-\frac{25}{32}=0.531$$

$$Y=y+\rho\cos\psi$$

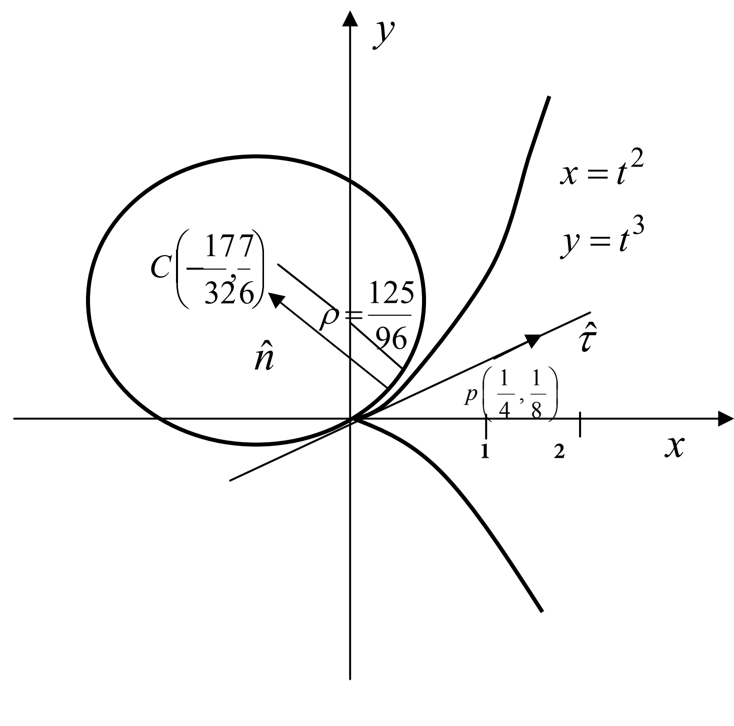
$$=0.125-\frac{125}{96}\cdot\frac{4}{5}$$

$$=0.125-\frac{25}{24}=1.167$$

إذن $c(-0.531,1.167)$

معادلة دائرة لانحناء هي،

$$\left(x+\frac{17}{32}\right)^2+\left(y-\frac{7}{6}\right)^2=\left(\frac{125}{96}\right)^2$$



شكل (154)

مثال (18):

أوجد معادلة دائرة تقوس المنحنى، $y^2 = 4ax$ عند النقطة $y = 2a$.

الحــل

$$y^2 = 4ax$$

$$2yy' = 4a \Rightarrow y' = \frac{2a}{y}$$

$$y'' = \frac{-2a}{y^2} y' = \frac{-2a}{y^2} \cdot \frac{2a}{y}$$

$$y'' = \frac{-4a^2}{y^3}$$

عند $y = 2a$، $y' = 1$، $y'' = \frac{-1}{2a}$، $x = a$

$$\rho = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$\rho = \frac{\left(1+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-1}{2a}} = -4\sqrt{2}a$$

نصف قطر الانحناء $|\rho| = -4\sqrt{2}a$

الإشارة السالبة تعني أن المنحنى مقعر لأسفل، وهي نفس إشارة y''.

$$\tan\psi = 1 \;\Rightarrow\; \psi = \frac{\pi}{4}$$

$$X = x - \rho\sin\psi$$

$$= a - \left(-4\sqrt{2}a\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = 5a$$

$$Y = y + \rho\cos\psi$$

$$= 2a - -4\sqrt{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2a$$

مركز دائرة الانحناء $c\left(5a,-2a\right)$

معادلة دائرة الانحناء،

$$\left(x+5a\right)^2 + \left(y+2a\right)^2 = 32a^2$$

$$x^2 + y^2 - 10ax + 4ay - 3a^2 = 0$$

تمارين (6-4)

في التمارين من (1) إلى (15) أوجد

أ- الانحناء عند النقطة P

ب- مركز الانحناء

جـ- ارسم بيان المنحنى ودائرة الانحناء.

1) $y = 2 - x^3 \ , \ P(1,1)$

2) $y = x^4 \ , \ P(1,1)$

3) $y = \cos 2x \ , \ P(0,1)$

4) $y = \sec x \ , \ P(\pi/3, 2)$

5) $x = t - 1 \ , \ y = \sqrt{t} \ , \ P(3,2)$

6) $x = t + 1 \ , \ y = t^2 + 4t + 3 \ , \ P(t = 0)$

7) $x = t - t^2 \ , \ y = 1 - t^3 \ , \ P(0,1)$

8) $x = t - \sin t \ , \ y = 1 - \cos t \ , \ P\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right)$

9) $x = 2\sin t \ , \ y = 3\cos t \ , \ P\left(1, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

10) $x = \cos^3(t) \ , \ y = \sin^3(t) \ , \ P\left(t = \frac{\pi}{4}\right)$

11) $y = \sin x \ , \ P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

12) $y = \sec x \ , \ P(0,1)$

13) $xy = 1 \ , \ P(1,1)$

14) $x = \cos t \ , \ y = \sin \frac{4t}{5} \ , \ P\left(t = \frac{\pi}{3}\right)$

15) $x = 5t^2 \ , \ y = 8t - 7t^2 \ , \ P\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$

16) أوجد نقط المنحنى التي عندها الانحناء أكبر ما يمكن،

أ- $9x^2 + 4y^2 = 36$ ب- $9x^2 + 4y^2 = 36$

جـ- $y = \sin x$

17) أوجد نقط على بيان المعادلة المعطاة ينعدم عندها الانحناء.

أ- $y = x^4 - 12x^2$ ب- $y = \tan x$

جـ- $y = 1 + x^3$ د- $y = 2x^3 - 3x^2$

18) أثبت أن الانحناء في نظام الإحداثيات القطبية المستوية (r,θ) هو

$$k = \frac{\left|2r' - rr' + r^2\right|}{\left[(r')^2 + r^2\right]^{3/2}} \; , \; r' = \frac{dr}{d\theta} \; , \; r'' = \frac{d^2 r}{d\theta^2}$$

في التمارين من (19) إلى (20)، وباستعمال نتيجة تمرين (18) أوجد انحناء المنحنيات القطبية عند $.P(r,\theta)$

19) $r = a(1 - \cos\theta) \; , \; 0 < \theta < 2\pi$

20) $r = \sin 2\theta \; , \; 0 < \theta < 2\pi$

في التمارين من (21) إلى (24) أوجد مركز التقوس لنقطة P على بيان المعادلة المعطاة.

21) $y = 2 - x^3 \; , \; P(1,1)$

22) $y = x^4 \; , \; P(1,1)$

23) $y = \cos 2x \; , \; P(0,1)$

24) $x = t^3 \; , \; y = 2t^2 \; , \; P(t = 1)$

بند (6-5): التقريب الخطي والتفاضلات

إذا كان المتغير x له قيم ابتدائية x_0 ثم تغير إلى x_1 فإن التغير أو الفرق $x_1 - x_0$ يرمز له Δx (دلتا x). التغير المناظر في قيمة $y = f(x)$ هو $f(x_1) - f(x_0)$، ويرمز له Δy.

تعريف:
إذا كان $y = f(x)$ وكان للمتغير x قيمة ابتدائية x_0 تغيرت إلى x_1 فإن $\Delta x = x_1 - x_0$ والتغير المناظر في قيمة y هو $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

بالرجوع إلى شكل (155) نجد أن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ هي ميل الوتر PQ، يرمز لها m_{PQ}.

إذن

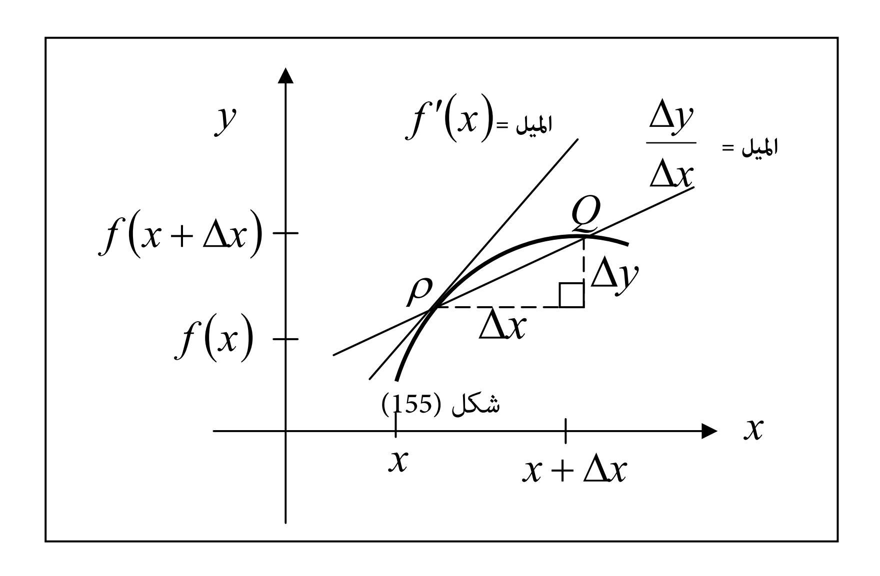
$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أو

$$\Delta y = m_{PQ} \Delta x$$

ونحن نعلم أن، $\Delta x = x_1 - x_0$، لذلك إذا علمت قيمة تقريبية لمقدار m_{PQ}، يمكننا استنتاج Δy و $f(x_1)$. سبق وعرفنا ميل المماس على أنه نهاية ميل الوتر (القاطع) المار من P إلى Q. كما عرفنا $f'(x_0)$ كرمز لهذه النهاية.

أي أن m_{PQ} تقريباً يساوي $f'(x_0)$ إذا كانت x_1 ليست بعيدة عن x_0.



شكل (155)

فيكون لدينا

$$f(x_1) = f(x_0) + \Delta y$$
$$\approx f(x_0) + m_{PQ}\Delta x$$

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

وهذه المعادلة تمكننا من استنتاج قيمة تقريبية $f(x_1)$ باستعمال القيم المعلومة $f(x_0)$، $f'(x_0)$. ولابد من التأكد على أن هذا التقريب أكثر مواءمة عندما تكون x_1 قريبة من x_0، وعندما يكون إيجاد $f(x_0)$، $f'(x_0)$ أسهل من إيجاد $f(x_1)$ مباشرة وإذا أردنا توخي الدقة في هذه المناقشة علينا أن نعيد كتابة تعريف المشتقة على النحو،

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أي أنه كلما اقتربت Δx من 0، تقترب النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ من $f'(x_0)$ كما هو واضح في شكل (155).

أي أن

$$\boxed{\Delta y = f'(x_0)\Delta x \quad , \quad \Delta x \approx 0}$$

مثال (19):

إذا كانت $y = f(x) = \sqrt{3+x}$ أوجد التقريب الخطي عند $x_0 = 6$ ثم استعمله في حساب تقريبي للقيم $\sqrt{8}$، $\sqrt{8.9}$، $\sqrt{9.3}$. قارن النتائج بالقيم التي تعطيها الآلة الحاسبة.

الحـل

$$f(x) = \sqrt{3+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}}$$

وعندما $x_0 = 6$،

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \quad ، \quad f(x_0) = \sqrt{9} = 3$$

إذن

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x) \approx 3 + \frac{1}{6}(x-6)$$

$$\approx 2 + \frac{x}{6}$$

الآن

$$\sqrt{8} = \sqrt{3+5} = f(5) = 2 + \frac{5}{6} = 2.83333$$

$$\sqrt{8.9} = \sqrt{3 + 5.9} = f(5.9) = 2 + \frac{5.9}{6} = 2.98333$$

$$\sqrt{9.3} = \sqrt{3 + 6.3} = f(6.3) = 2 + \frac{6.3}{6} = 3.05$$

الجذر	بالتقريب الخطي	بالآلة الحاسبة
$\sqrt{8}$	2.83333	2.828427
$\sqrt{8.9}$	2.98333	2.983287
$\sqrt{9.3}$	3.05	3.049590

تعريف: إذا كان $y = f(x)$ ، f قابلة للاشتقاق، فإن التفاضلة dy تعرف بالمعادلة dy تعرف بالمعادلة

$$dy = f'(x)\Delta x$$

مثال (20):

إذا كانت $y = 3x^2 - 5$

أ- أوجد معادلة لأجل Δx و dy

ب- إذا تغيرت x من 2 إلى 2.1 احسب كل من Δy ، dy.

الحـــل

أ-

$$y = f(x) = 3x^2 - 5$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= \left[3(x + \Delta x)^2 - 5\right] - \left(3x^2 - 5\right)$$

$$= 3\left(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2\right) - 5 - 3x^2 + 5$$

$$= 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2$$

أما

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)dx \\ &= f'(x)\Delta x \\ &= 6x\Delta x \end{aligned}$$

ب- باستعمال $x = 2$ ، $\Delta x = 0.1$

$$\Delta y = f(2.1) - f(2)$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= 6 \times 2 \times 0.1 + 3(0.1)^2 \\ &= 1.2 + 0.03 = 1.23 \end{aligned}$$

$$dy = (6 \times 2)(0.1)$$

$$dy = 1.2$$

لأقرب علامة عشرية واحدة.

$$dy = \Delta x$$

يلاحظ أنه يمكننا كتابة

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + \Delta y \\ &\approx f(x) + dy \end{aligned}$$

$$dy = f'(x)\Delta x$$

مثال (21):

أوجد بالتقريب الخطي التغير في $\sin\theta$ عندما تتغير θ من $\pi/3$ إلى $61\pi/180$، ثم أوجد تقريبا لقيمة $\sin\left(\frac{61\pi}{180}\right)$.

الحــل

$$y = f(\theta) = \sin\theta$$
$$dy = \cos\theta\Delta\theta$$

بوضع $\theta = \pi/3$، $\Delta\theta = \dfrac{\pi}{180}$

$$dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0.0087$$

الآن

$$\sin(\theta + \Delta\theta) = \sin\theta + dy$$
$$\sin\left(\frac{61\pi}{180}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 0.0087$$
$$\approx 0.8660 + 0.0087$$
$$\approx 0.8747$$

القيمة الحقيقية من الآلة الحاسبة، $\sin\left(\dfrac{61\pi}{180}\right) = 0.8746$ الخطأ لا يتجاوز 0.0001 تقريبا.

إذا كانت Δy إلى التغير في y المناظر لـ Δx. فقد نعتبر Δy هو الخطأ في حساب y الناجم عن الخطأ Δx في قياس x. ويمكن تقريب Δy بـ dy كما يلي

$$\Delta y \approx dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)(\Delta x)$$

فمثلا إذا كان $y = \dfrac{4}{3}\pi x^2$، وتم قياس x، على أن $x = 12cm$ بخطأ أقصاه $\pm 0.06cm$ فإن الخطأ المناظر في حساب y هو

$$\Delta y = 4\pi x^2 \Delta x$$
$$= 4\pi(12)^2(\pm 0.06) \approx \pm 109$$

$\therefore$ أقصى خطأ في حساب y هو تقريباً $\pm 109cm^3$.

هذا الخطأ يسمى الخطأ المطلق. أما نسبة الخطأ ± 0.06 في x بالنسبة إلى $x = 12$ فيسمى الخطأ النسبي في قياس x وبالمثل الخطأ النسبي في حساب y هو

$$\pm 0.015 = \frac{\pm 109}{\frac{4}{3}\pi(12)^3} = \frac{\Delta y}{y}$$

تعريف: إذا كانت $y = f(x)$ وتغيرت من y_0 إلى y_1 بالتناظر مع تغيير x من x_0 إلى x_1 فإن:

1) الخطأ المطلق $\Delta y = y_1 - x_0$ ويقرب إلى $dy = f'(x_0)\Delta x$

2) الخطأ النسبي $\frac{\Delta y}{y_0}$ ويقرب إلى $\frac{dy}{y_0}$

3) الخطأ المئوي $\frac{\Delta y}{y_0} \times 100\%$ ويقرب إلى $\frac{dy}{y_0} \times 100\%$

مثال (22):

يتغير حجم الغاز V وع الضغط P تغيرا أديباتيكيا تبعاً للعلاقة ($PV^{\gamma} =$ ثابت) حيث $\gamma = 1.4$. فإذا كان حجم الغاز $2m^3$ والخطأ في حسابه هو $10cm^3$. أوجد الخطأين النسبي والمئوي في حساب الضغط.

الحــل

$$P = \frac{(\text{ثابت})}{V^{\gamma}} = \frac{k}{V^{\gamma}}$$

$$P = \frac{-\gamma\ k}{V^{\gamma+1}} \Delta V$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{-\gamma}{V} \Delta V$$

عندما $V = 2m^3$ ، $\Delta V = \frac{10}{10^6} m^3$

$$\frac{\Delta V}{V} = 5 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\Delta P}{P} = -1.4 \times 5 \times 10^{-6}$$

الخطأ النسبي،

$$\frac{\Delta P}{P} = -7 \times 10^{-6}$$

الخطأ المئوي،

$$\frac{\Delta P}{P} \times 100\% = -7 \times 10^{-4}\%$$

$$= -0.0007\%$$

تمارين (6-5)

في التمارين من (1) إلى (12) أوجد تقريباً لمقدار $f(b)$ عندما تتغير x من a إلى b.

(1) $f(x)=3x^2-5x+11$ ، $a=4$ ، $b=1.02$

(2) $f(x)=3x^3-8x+7$ ، $a=4$ ، $b=3.98$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ، $a=7$ ، $b=7.05$

(4) $f(x)=x^4$ ، $a=1$ ، $b=1.02$

(5) $f(x)=x^4$ ، $a=1$ ، $b=0.98$

(6) $f(x)=2\sin x+\cos x$ ، $a=\frac{\pi}{6}$ ، $b=\frac{9\pi}{60}$

(7) $f(x)=\csc x+\cot x$ ، $a=45^\circ$ ، $b=44^\circ$

(8) $f(x)=\frac{1}{\csc x-\cot x}$ ، $a=45^\circ$ ، $b=46^\circ$

(9) $f(x)=\sec x$ ، $a=60^\circ$ ، $b=62^\circ$

(10) $f(x)=\tan x$ ، $a=30^\circ$ ، $b=28^\circ$

(11) $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$ ، $a=180^\circ$ ، $b=181^\circ$

(12) $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $a=0.1$ ، $b=0.101$

في التمارين من (13) إلى (18) أوجد:

أ- معادلة عامة لكل من Δy ، dy

ب- عندما تتغير x من a إلى $a+\Delta x$ احسب Δy ، dy ، $dy-\Delta y$

(13) $y=x^2-2\sqrt{2}x+5$ ، $a=2\sqrt{2}$ ، $\Delta x=-0.2\sqrt{2}$

(14) $y=x^3-4$ ، $a=-1$ ، $\Delta x=0.1$

(15) $y=\frac{1}{1+x}$ ، $a=1$ ، $\Delta x=-0.03$

(16) $y=4-9x$ ، $a=-2$ ، $\Delta x=-0.02$

(17) $y=7x+12$ ، عند أي x ، Δx

(18) $y=\frac{1}{x^2}$ ، $a=3$ ، $\Delta x=0.3$

في التمارين من (19) إلى (24) إذا كان أكبر خطأ في قياس x هو Δx، استعمل التفاضلات لإيجاد الخطأ النسبي والخطأ المئوي في حساب y :

(19) $y=4x^3$ ، $x=3$ ، $\Delta x=\pm 0.01$

(20) $y=3x^4$ ، $x=1$ ، $\Delta x=\pm 0.01$

(21) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ ، $x=4$ ، $\Delta x=\pm 0.02$

(22) $y=x^3+5x$ ، $x=1$ ، $\Delta x=\pm 0.01$

(23) $y=2\sqrt[3]{x}$ ، $x=27$ ، $\Delta x=\pm 0.3$

(24) $y=3x^2-x$ ، $x=2$ ، $\Delta x=0.1$

(25) إذا كان $P=6t^{2/3}+t^2$ فأوجد dP عند $t=8$ ، $dt=0.2$.

(26) إذا كان $y=40\sqrt[5]{x^2}$ والخطأ المسموح به لا يزيد عن ما نسبته ± 0.08 في قياس x . أوجد الخطأ النسبي والمئوي الممكن في y .

(27) المساحة السطحية لأسطوانة مغلقة هي $S=10\pi r^2$ والخطأ المئوي المسموح به في S لا يزيد عن $\pm 10\%$، أوجد أكبر خطأ نسبي مسموح به في r .

(28) إذا قذف جسيم من سطح الأرض بسرعة ابتدائية v_0 في اتجاه يصنع α درجة مع الأفقي فإن أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف هو h وأقصى مدى يصل إليه المقذوف على الأفقي هو R حيث

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \ , \ R = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

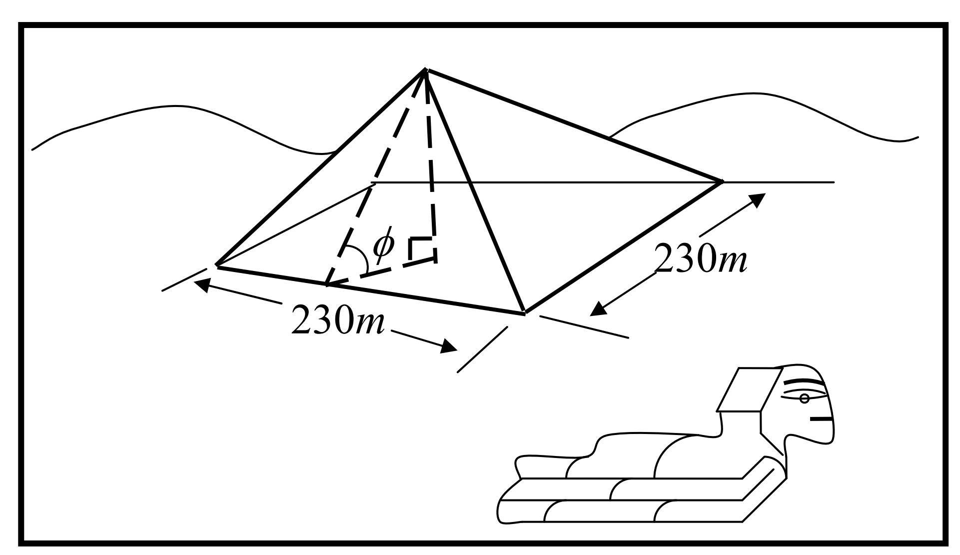
حيث g عجلة الجاذبية الأرضية. فإذا كان

$$v_0 = 100\, m/s \ \text{(متر/ثانية)} \ , \ g = 9.8\, m/s^2$$

وتغيرت α من 30° إلى 30.5°. استعمل التفاضلات لإيجاد قيم تقريبية للتغير في كل h، R.

(29) الهرم الأكبر له قاعدة مربعة طول ضلعها $230m$. (أنظر شكل (156)) ولإيجاد قيم تقريبية لارتفاع وقف رجل عند منتصف أحد أحرف القاعدة ونظر لرأس الهرم فوجد أن زاوية الارتفاع هي $\phi = 52^0$.

إلى أي مدى من الدقة يجب أن يكون قياس هذه الزاوية لكي يكون الخطأ في حساب h واقعاً بين 1- متر إلى 1+ متر ؟

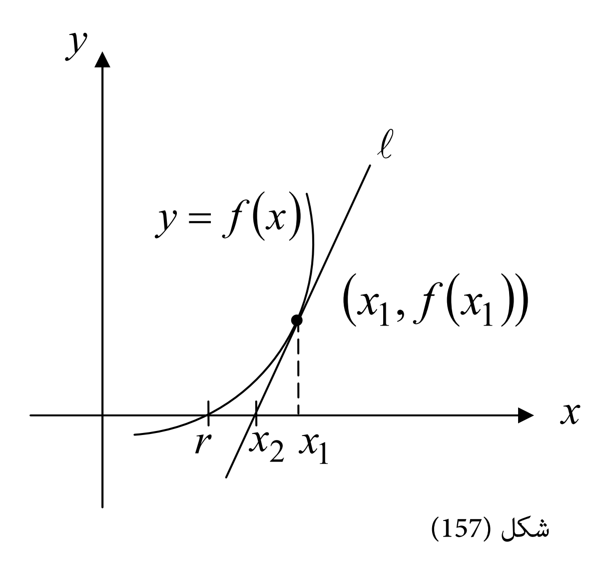


شكل (156): تمرين (29)

بند (6-6): طريقة نيوتن- رافسون

تبني طريقة نيوتن- رافسون، لإيجاد تقريب للجذر "r" لدالة قابلة للاشتقاق "f"، لى فكرة أن المماس هو مستقيم قريب من المنحنى بالقرب من نقطة التماس.

في هذه الطريقة نبدأ بتقريب x_1 للجذر r، ونعتبر الخط المماس ℓ لبيان $y = f(x)$ عند $(x_1, f(x_1))$ (أنظر شكل (157)).



شكل (157)

الخط المماس وبيان f يجب أن يقطعا المحور x بالقرب من بعضهما لأن الخط المماس يظل قريب من بيان f. ومن ثم يمكننا تقريب جذر f بإيجاد جذر للخط المماس. لأن معادلة الخط المماس خطية ومن السهل حساب جذرها.

ونستطيع أن نوجد أول تقريب لـ f باستعمال مبرهنة القيمة الوسطى التي تضمن وجود جذر في أي فترة (a,b) إذا كان إشارتي $f(a)$، $f(b)$ مختلفتين.

لنعتبر المماس ℓ لبيان f عند $(x_1, f(x_1))$. إذا كانت x_1 قريبة بالقدر الكاف من r، إذن، وكما هو واضح في شكل (157)، تقاطع ℓ مع المحور x أي x_2 يجب أن تكون تقريبا جيدا للجذر r. وحيث أن ميل ℓ هو $f'(x_1)$، فإن معادلة المماس هي

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

ولإيجاد x_2، ضع $y = 0$،

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

ومنها،

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad , \quad f'(x_1) \neq 0$$

وبأخذ x_2 كتقريب ثان لـ r، نستطيع تكرار العملية باستعمال المماس عند $(x_2, f(x_2))$.

وعلى ذلك فالتقريب الثالث هو

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad , \quad f'(x_2) \neq 0$$

ونستمر في تكرار العملية حتى نصل للدرجة المطلوبة من التقريب. هذه الطريقة في استعمال تقريبات متتابعة من الجذور الحقيقية تسمى طريقة نيوتن- رافسون.

طريقة نيوتن- رافسون

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق، r هو جذر حقيقي لها.

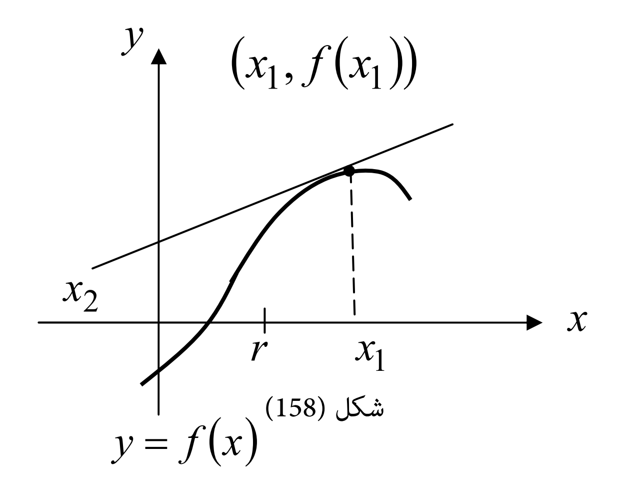
فإذا كان x_n هو تقريب لـ r، فإن التقريب التالي x_{n+1} يعطى على النحو،

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad f'(x_n) \neq 0$$

يراعى أنه ليس من المضمون أن تكون x_{n+1} لكل تقريباً أفضل لـ r عن x_n لكل r. فإذا كانت x_1، التقريب الأول ليست قريبة بالقدر الكاف من r، فمن الممكن أن يكون التقريب الثاني x_2 أسوأ من x_1. وشكل (158) يوضح مثل هذه الحالة. فمن الواضح عند اختيار x_n أن لا يكون $f'(x_n)$ قريبة من صفر. وإلا سيكون المماس ℓ تقريباً أفقي.

وسوف نتبع القاعدة التالية عند تطبيق طريقة نيوتن- رافسون،

" إذا كان المطلوب تقريب إلى k من الأعداد العشرية، فإننا نكرر طريقة نيوتن- رافسون إلى أن نجد أن تقريباً متتاليان متساويان تماماً في k من الأعداد العشرية".



شكل (158)

مثال (23):

أوجد أكبر جذر موجب للمعادلة،

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

لأربعة أرقام عشرية.

الحــل

نفرض أن

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

نجد أن

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-17	-1	3	1	1-	3	19

وبملاحظة تغيير إشارات $f(x)$ نجد أن للدالة $f(x)$ جذور ثلاثة. الأول يقع في الفترة $(-2,-1)$، والثاني في الفترة $(0,1)$ والأخير في الفترة $(1,2)$

$\therefore$ يوجد جذران موجبان أكبرهما هو الواقع في الفترة $(1,2)$.

وبملاحظة أن $|f(1)| = 1$، $|f(2)| = 3$، نستنتج أن الجذر الواقع بين 1، 2 أقرب للعدد 1.

نستطيع إذن أن نتخذ

$$x_1 = 1.25$$

ولكن

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

إذن من معادلة نيوتن- رافسون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}$$

$$= \frac{3x_n^3 - 3x_n - x_n^3 + 3x_n - 1}{3x_n^2 - 3}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3(x_n^2 - 1)}$$

$$x_2 = \frac{2(1.25)^3 - 1}{3((1.25)^2 - 1)}$$

$$x_2 = 1.7222222$$

ثم

$$x_3 = \frac{2(1.7222222)^3 - 1}{3[(1.7222222)^2 - 1]}$$

$$x_3 = 1.5625908$$

$$x_4 = \frac{2(1.5625908)^3 - 1}{3\left[(1.5625908)^2 - 1\right]}$$

$$x_4 = 1.5330907$$

بالمثل

$$x_5 = 1.5320888$$
$$x_6 = 1.5320888$$

إذن

$$r = 1.5321$$

مثال (24):

أوجد تقريبا للجذر الحقيقي للمعادلة

$$x + 1 - 3\cos x = 0$$

الحــل

نفرض أن

$$f(x) = x + 1 - 3\cos x$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$
$f(x)$	-2	-1.074	$+0.5472$

$\therefore$ يوجد جذرين $x = \frac{\pi}{3}$ ، $x = \frac{\pi}{6}$.

نعتبر،

$$x_1 = \pi/3 = 1.0472$$
$$f'(x) = 1 + 3\sin x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + 1 - 3\cos x_n}{1 + 3\sin x_n}$$

$$= \frac{x_n + 3x_n \sin x_n - x_n - 1 + 3\cos x_n}{1 + 3\sin x_n}$$

$$= \frac{3(x_n \sin x_n + \cos x_n) - 1}{3\sin x_n + 1}$$

$$x_2 = \frac{3\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right) - 1}{3\sin\frac{\pi}{3} + 1}$$

$$= \frac{3\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right) - 1}{3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1}$$

$$x_2 = 0.8951155$$

تمارين (6-6)

1) أوجد باستعمال طريقة نيوتن- رافسون قيم الجذور مقربة لأقرب 4 علامات عشرية،

$$\sqrt{7}\ ,\ \sqrt{29}\ ,\ \sqrt[3]{5}\ ,\ \sqrt[5]{3}$$

2) قرب إلى أربع أماكن عشرية جذر المعادلة الواقع في الفترة المعطاة.

أ) $x^4+2x^3-5x^2+1=0\ ,\ [1,2]$

ب) $x^4-5x^2+2x-5=0\ ,\ [2,3]$

جـ) $x^5+x^2-9x-3=0\ ,\ [-2,-1]$

د) $\sin\theta+\theta\cos\theta=\cos\theta\ ,\ [0,1]$

3) أوجد أكبر جذر للمعادلة $f(x)=0$ ،

أ) $f(x)=x^4-11x^2-44x-24$

ب) $f(x)=x^3-36x-84$

4) أوجد لرقمين عشريين

أ) جذر المعادلة $x^3+5x-3=0$

ب) أكبر جذر للمعادلة $2x^3-10x^2+11x-2=0$

جـ) الجذر الموجب للمعادلة $\pi-2x-3\cos x=0$

د) جذر المعادلة $\frac{\pi}{2}+x-\sin x=2$

في التمارين من (5) إلى (18) أوجد القيم التقريبية لجميع الجذور الحقيقية للمعادلة مقربة لرقمين عشريين.

(5 $x^4 = 240$

(6 $x^4 - x - 13 = 0$

(7 $20x^2 - 1 = 0$

(8 $x^5 - 2x^2 + 4 = 0$

(9 $x^3 + 2x^2 - 8x - 3 = 0$

(10 $x^3 - 3x - 1 = 0$

(11 $2\theta - 5 - \sin\theta = 0$

(12 $x^2 - \cos 2x = 0$

(13 $x^2 = \sqrt{x+3}$

(14 $x^3 + x^2 - 7 = 0$

(15 $x^2 + \cos\frac{1}{2}x - 9 = 0$

(16 $\sin 2x - 6x + 6 = 0$

(17 $\sin^2 x = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$

(18 $2x^3 + 0.1x^2 + 2x + 0.9 = 0$

تمارين عامـة

1) أوجد من التعريف مباشرة المشتقة $f'(x)$

أ) $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+1}$ ب) $f(x)=\sqrt{2-5x}$

2) أوجد المشتقة الأولى

أ) $f(x)=1/(x^4-x^2+1)$ ب) $f(x)=\sqrt[3]{7x^2-4x+3}$

جـ) $f(x)=\dfrac{6}{(3x^2-1)^4}$ د) $f(t)=(t^2-t^{-2})^{-2}$

هـ) $g(x)=\sqrt[5]{(3x+2)^4}$ و) $f(x)=\left(\dfrac{8x^2-4}{1-9x^3}\right)^4$

ز) $f(x)=(x^6+1)^5(3x+2)^3$ ح) $f(x)=(2x^2-3x+1)(9x-1)^4$

ط) $f(x)=6x^2-\dfrac{5}{x}+2x^{-2/3}$ ى) $f(u)=\sqrt{\dfrac{2u-5}{7u-9}}$

3) أوجد النهاية إن وجدت:

أ) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta^2}{\sin\theta}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\sin 2x}{3x}$

جـ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+3x-2}{5x}$ د) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}$

4) أوجد المشتقة الأولى

أ) $u(x)=\sqrt{1+\cos 2x}$ ب) $f(x)=\sin^2(4x^3)$

جـ) $f(x)=(\sec x+\tan x)^5$ د) $f(x)=x^2\cot x$

هـ) $s(t)=\dfrac{\sin 2t}{1+\cos 2t}$ و) $h(x)=\left(\cos x^{\frac{1}{3}}+\sin^{\frac{1}{3}} x\right)^3$

ز) $f(t)=\dfrac{\csc t+1}{\cot 2t+1}$ ح) $f(x)=\sec 5x\tan 5x\sin 5x$

ط) $f(x)=\tan^4\left(\sqrt[4]{x}\right)$ ى) $y(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

5) بفرض أن المعادلة تعين دالة قابلة لاشتقاق f بحيث $y=f(x)$ أوجد، y'

أ) $5x^3+2x^2y+4y^3-7=0$ ب) $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1}$

جـ) $xy^2=\sin(x+2y)$

6) أوجد معادلة المماس والعمودي لبيان f عند P.

$$y=2x-\frac{4}{\sqrt{x}} \quad , \quad P(4,6)$$

7) أوجد نقط المنحنى $y=3x-\cos 2x$ التي عندها المماس عمودي على المستقيم $2x+4y=25$ (الإحداثيات x فقط).

8) أوجد y' ، y'' ، y''' ،

أ) $y=5x^3+4\sqrt{x}$ ب) $x^2+4xy-y^2=8$

9) إذا كانت $y=3x^2-7$ فأوجد dy ، Δy ، $dy-\Delta y$

10) قيس ضلع مثلث متساوي الأضلاع فوجد 4 سم بخطأ أقصاه $\pm 0.03cm$. استخدم التفاضلات لإيجاد أقصى خطأ في حساب المساحة وأوجد قيمة تقريبية للخطأ المئوي.

11) إذا كانت $f(x)=2x^3+x^2-x+1$ ، $g(x)=x^5+4x^3+2x$
استعمل التفاضلات لاستنتاج تقريب للتغير في $g(f(x))$ المناظر لتغير x من 1- إلى 1.01- .

12) إذا كان f ، g تحقق أن $f(2)=-1$ ، $f'(2)=4$ ، $g(2)=-3$ ، $f''(2)=-2$ ، $g'(2)=2$ ، $g''(2)=1$. أوجد قيمة كل من ما يأتي عند $x=2$.
$(2f-3g)'$ ، $(2f-3g)''$ ، $(fg)'$ ، $(fg)''$ ، $(f/g)'$ ، $(f/g)''$.

13) أذكر ما إذا كان بيان f له مماس رأسي أم حافة مدببة
أ) $f(x)=3(x+1)^{\frac{1}{3}}-4$ ب) $f(x)=2(x-8)^{\frac{2}{3}}-1$

14) قانون ستيفان وبولتزمان للطاقة الحرارية المشعة من وحدة مساحات سطح أسود درجة حرارته T هو $R=\sigma T^4$ حيث R معدل الإشعاع من وحدة المساحات ، k مقدار ثابت. إذا كان الخطأ في قياس T هو 0.6% فما هو الخطأ المئوي في قياس R.

15) مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 قدم ونصف قطر قاعدته r يتزايد. أوجد معدل تغير مساحة سطحه S بالنسبة إلى r عندما ($r=6$ قدم).

16) حوض مائي طوله 10 متر ومقطعه عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين قاعدته السفلى 3 متر والعليا 5 متر وارتفاعه 2 متر.
فإذا كان الماء يرتفع بمعدل $\frac{1}{48}$ متر/دقيقة عندما كان عمق الماء 1 متر. أوجد معدل دخول الماء إلى الحوض.

17) استعمل طريقة نيوتن ورافسون لإيجاد جذر المعادلة $\sin x - x\cos x = 0$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. علماً بأن الجذر المطلوب يقع بين π ، $3\pi/2$.

18) أوجد النهاية إن وجدت

أ) $\lim_{x\to 3} \frac{5x+11}{\sqrt{x+1}}$ ب) $\lim_{x\to -2} \left(2x - \sqrt{4x^2 + x}\right)$

جـ) $\lim_{x\to 3/2} \frac{2x^2 + x - 6}{4x^2 - 4x - 3}$ د) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - x - 2}$

هـ) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ و) $\lim_{x\to 1/2} \frac{8x^3 - 1}{2x - 1}$

ز) $\lim_{u\to 0} \frac{(a+u)^4 - a^4}{u}$ ح) $\lim_{x\to -3} \sqrt[3]{\frac{x+3}{x^3 + 27}}$

ط) $\lim_{x\to -\infty} \frac{(2x-5)(3x+7)}{(x-11)(4x+9)}$ ى) $\lim_{x\to -\infty} \frac{6-7x}{(3+2x)^4}$

ك) $\lim_{x\to (2/3)^+} \frac{x^2}{4-9x^2}$ ل) $\lim_{x\to 0^+} \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

19) ارسم بيان الدالة f واحسب النهايات الآتية

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ ، } \lim_{x\to a^+} f(x) \text{ ، } \lim_{x\to a} f(x)$$

أ) $$f(x) = \begin{cases} 3x & , x \le 2 \\ x^2 & , x > 2 \end{cases} \quad , \ a = 2$$

ب) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-3x} & , x < -3 \\ \sqrt[3]{x+2} & , x \ge -3 \end{cases} \quad , \ a = -3$$

جـ) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ 2 & , x = 1 \\ 4 - x^2 & , x > 1 \end{cases} \quad , \ a = 1$$

20) باستعمال التعريف $\in$ ، δ أثبت أن $\lim_{x \to 6}(5x-21)=9$

21) أوجد الأعداد التي عندها f غير مستمرة.

أ- $f(x)=\frac{|x^2-16|}{x^2-16}$ ب- $f(x)=\frac{x^2+6x-2}{x^2-2x}$

22) أوجد الأعداد التي عندها f مستمرة.

أ- $f(x)=2x^4-\sqrt{x}+1$ ب- $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4-16}$

23) أثبت أن f مستمرة عند a:

$$f(x)=\sqrt{5x+9} \quad , \quad a=8$$

24) أوجد نقط عدم لاستمرار :

أ) $f(x)=\frac{2}{x^4-x^3-2x-3}$ ب) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x^2+x-1}$

25) أوجد القيم القصوى للدالة f في الفترة المعطاة

$$f(x)=-x^2+6x-8 \; ; \; [1,6]$$

26) أوجد الأعداد الحرجة للدالة f ،

$$f(x)=-(x+2)^3+(3x-1)^4$$

27) استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة f. ثم أوجد الفترات التي عليها f متزايدة أو متناقصة ووضح بيان f.

أ) $f(x)=-4x^3+9x^2+12x$ ب) $f(x)=(4-x)\ x^{1/3}$

28) استعمال اختبار المشتقة الثانية ما أمكن لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة f. أوجد الفترات التي يكون فيها بيان f مقعر لأعلى أو مقعر لأسفل وأوجد الإحداثي x لنقط الانقلاب . ثم خطط بيان f .

أ) $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

29) إذا كانت $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ ، أوجد القيم القصوى المحلية وخطط بيان f للفترة $0\le x\le 2\pi$.

30) خطط بيان الدالة المستمرة f التي تحقق الشروط الآتية :

$$\begin{aligned}
&f(0)=2, f(-2)=f(2)=0;\\
&f'(-2)=f'(0)=f'(2)=0;\\
&f'(x)>0; (-2<x<0)\ ;\\
&f'(x)<0; (x<-2 \ \text{أو}\ x>0)\ ;\\
&f''(x)>0; (x<-1 \ \text{أو}\ 1<x<2)\ ;\\
&f''(x)<0; (-1<x<1 \ \text{أو}\ 1>x>2)
\end{aligned}$$

31) القيم القصوى وبيان f:

أ) $f(x)=\dfrac{3x^2}{9x^2-25}$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x+3}$

جـ) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+2x-8}$

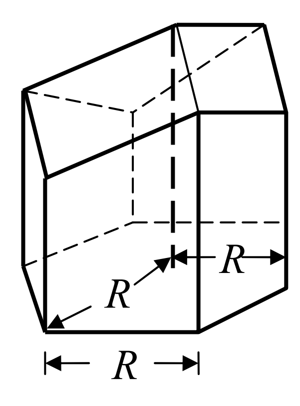
32) إذا كانت $f(x)=x^3+x^2+x+1$ ، أوجد عدد c يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[0,4]$.

33) منشور مسدس منتظم نصف قطره وحرف قاعدته R ملحوم من أعلى مع

ثلاثة أوجه معينة الشكل متقابلة في رأس مشتركة كما في شكل (159) وقاعدة المنشور مفتوحة ويسع حجم قدره V. بحيث تعطى مساحته السطحية بالعلاقة :

$$S = \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{V}{R} - \frac{3}{2}R^2 \cot\theta + \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 \csc\theta$$

اثبت أن S تصل نهاية صغرى عندما $\theta = 54.7^\circ$.



شكل (159): تمرين (33)

34) يرغب رجل لعمل سور حول حقل مستطيل إلى ثلاثة بقاعها مستطيلة بعمل سورين موازيين لأحد الجوانب . فإذا كان قد حصل على 1000 متر سور فما هي الأبعاد اللازمة للحصول على أكبر مساحة .

35) حديقة مستطيلة ومتصلة بعرضيها نصفى دائرتين ومحيطها 880 متراً ما هي الأبعاد التي تجعل مساحة المستطيل أكبر ما يمكن .

36) سلك طوله 5 متر يراد تقسيمه لجزئين احدهما يصنع منه طوق دائري والثاني يصنع منه مربع . أوجد طول كل من الجزئين بشرط أن يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أ) نهاية عظمى ب) نهاية صغرى.

37) تتحرك نقطة في خط مستقيم بحيث يتحدد موضعها عند أي لحظة t بالعلاقة $x(t) = (t^2 + 3t + 1)/(t^2 + 1)$، أوجد السرعة والعجلة عند أيْ لحظة t واشرح حركة النقطة في الفترة $[-2,2]$.

أجوبة التمارين العامة

1) أ) $\dfrac{-4x}{(2x^2+1)^2}$ ب) $-\dfrac{5}{2}(2-5x)^{-\frac{1}{2}}$

2) أ) $\dfrac{2x(1-2x^2)}{(x^4-x^2+1)^2}$ ب) $\dfrac{2(7x)}{3(7x^2-4x+3)^{2/3}}$

جـ) $\dfrac{-141x}{(3x^2-1)^5}$ د) $-\dfrac{4(t+t^{-3})}{(t^2-t^{-2})^3}$

هـ) $\dfrac{12}{5(3x+2)^{1/5}}$ و) $\dfrac{1024x(2x^2-1)^3(18x^3-27x+4)}{(1-9x^3)^5}$

ز) $3(x^6+1)^4(3x+2)^2(33x^6+20x^5+3)$

ح) $(9x-1)^3(108x^2-139x+39)$

ي) $12x+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{4}{3x^{5/3}}$ ك) $\dfrac{-53}{2\sqrt{(2u+5)(7u-9)^3}}$

3) أ) 0 ب) $\dfrac{2}{3}$ جـ) $\dfrac{3}{5}$ د) 2

4) أ) $-\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$ ب) $12x^2\sin 8x^3$

جـ) $5\sec x(\sec x+\tan x)^5$

و) $\dfrac{(\cos\sqrt[3]{x}-\sin\sqrt[3]{x})(\cos\sqrt[3]{x}+\sin\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}$

ح) $\dfrac{\csc t(1-\cot t+\csc t)}{(\cot t+1)^2}$ ط) $10\tan 5x\sec^2 5x$

ي) $\frac{\tan^3\left(\sqrt[4]{x}\right)\sec^2\left(\sqrt[4]{x}\right)}{\sqrt[4]{x^3}}$ ك) $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$

5) أ) $\frac{4xy^2-15x^2}{12y^2-4x^2y}$ ب) $\frac{1}{\sqrt{x}\left(3\sqrt{y}+2\right)}$

جـ) $\frac{\cos(x+2y)-y^2}{2xy-2\cos(x+2y)}$

6) $y=\frac{9}{4}x-3\ ;\ y=-\frac{4}{9}x+\frac{70}{9}$

7) $\frac{7\pi}{12}+\pi n\ ,\ \frac{11\pi}{12}+\pi n$

8) أ) $15x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\ ;\ 30x-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\ ;\ 30+\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

ب) $y'=\frac{x+2y}{y-2x}\ ,y''=\frac{5\left(y^2-4xy-x^2\right)}{(y-2x)^3}=-\frac{40}{(y-2x)^3}$

$$y'''=\frac{600x}{(y-2x)^5}$$

9) $6x\Delta x+3(\Delta x)^2$ ، $6xdx$ ، $-3(\Delta x)^2$

10) $\pm 0.06\sqrt{3}\approx\pm 0.104cm^2$ ، $\neq 1.5\%$

11) -0.57

12) 2 ، -7 ، -14 ، 21 ، $-\frac{10}{9}$ ، $-\frac{19}{27}$

13) أ) مماس رأسي عند $(-1,-4)$ ب) حافة مدببة عند $(8,-1)$

14) 2.4%

15) $\frac{5}{6} ft^3 / \min$

16) $\frac{5}{6} m^3 / \min$

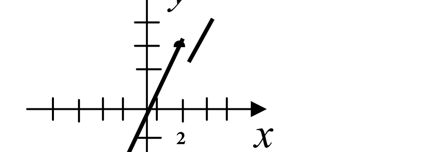
17) 4.493

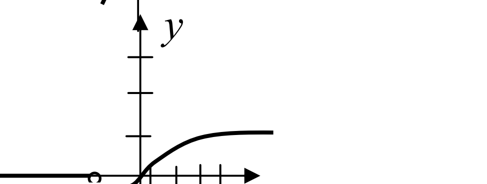
18) أ) 13   ب) $-4-\sqrt{14}$ جـ) $\frac{7}{8}$ د) $\frac{32}{3}$

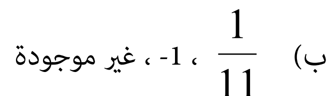
هـ) ∞ و) 3   ز) $4a^3$ ح) $\frac{1}{3}$

ط) $\frac{3}{2}$ ي) 0   ك) $-\infty$ ل) $-\infty$

19) أ) 6، 4 ، غير موجودة







ب) $\frac{1}{11}$ ، -1 ، غير موجودة



جـ) 1 ، 3 غير موجودة

21) أ) ± 4 ب) $0,2$

22) أ) R ب) $[-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,3]$

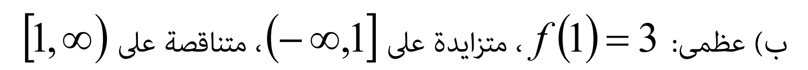
24) أ) $-0.874,1.941$ $-$ ب) $-1.618,0.618$ $-$

25) عظمى : $f(3)=1$ ، صغرى : $f(6)=-8$

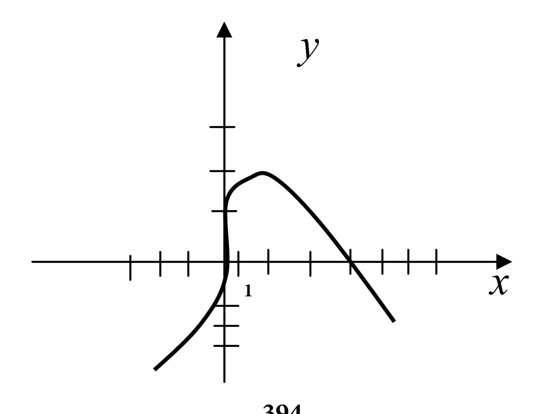
26) -2 ، -1 ، $\frac{1}{3}$

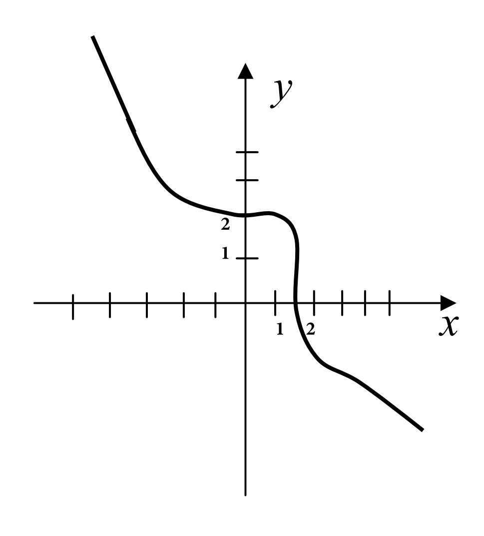
27) أ) عظمى : $f(2)=28$ ، صغرى : $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{13}{4}$

متزايدة على $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ ، متناقصة على $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[2,\infty)$

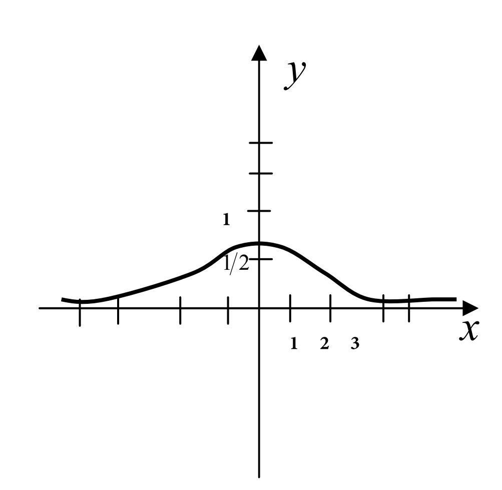


ب) عظمى: $f(1)=3$ ، متزايدة على $(-\infty,1]$ ، متناقصة على $[1,\infty)$

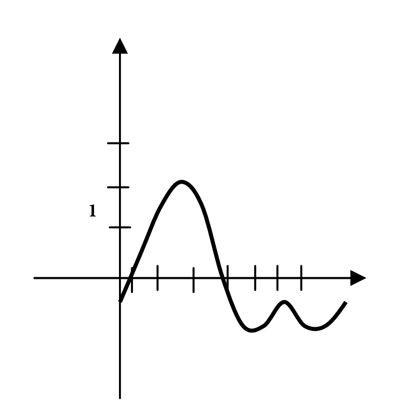




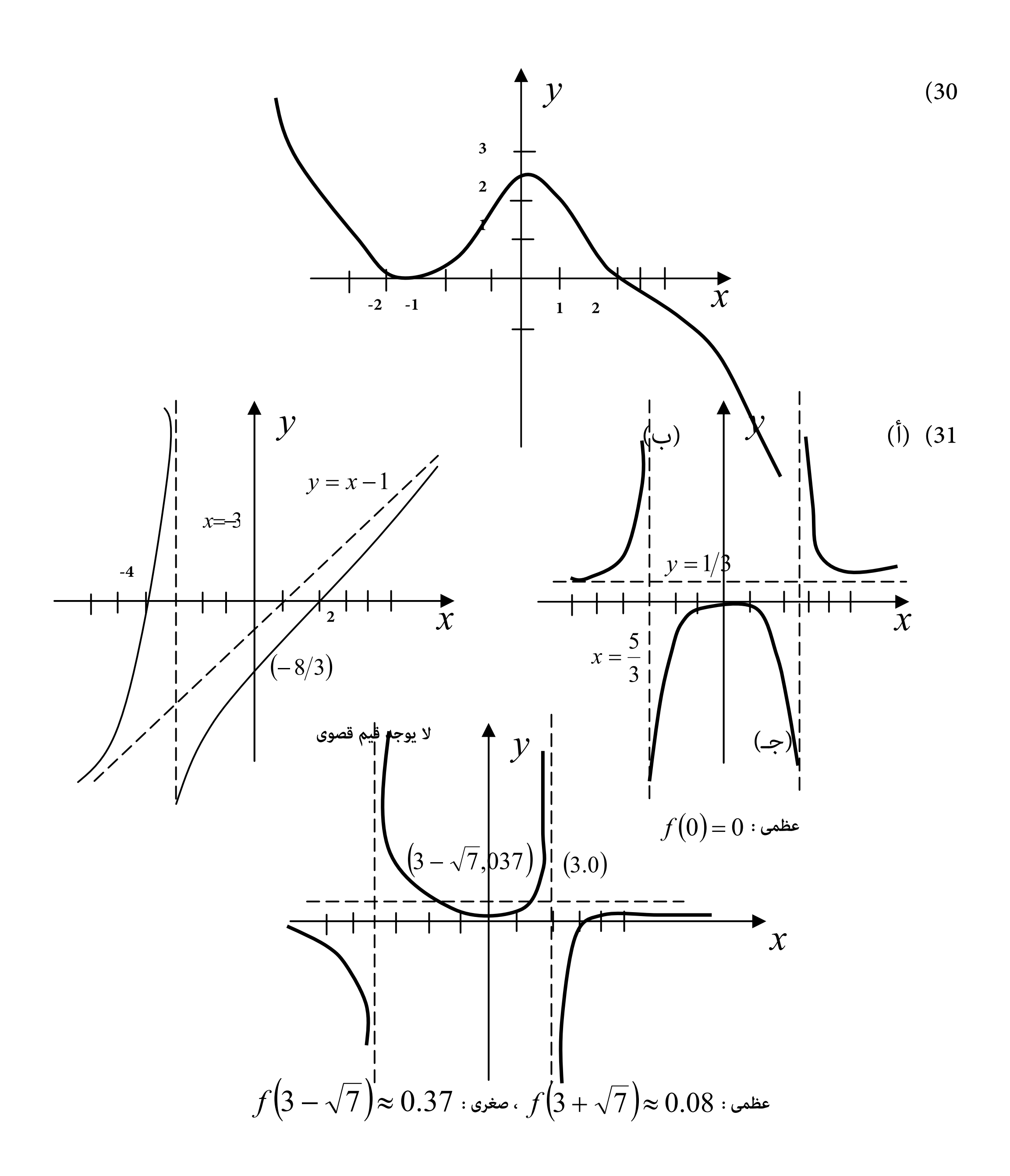
28) أ) بما أن $f''(0)=0$ ، $f''(2)$ غير معرفة
استعمل اختبار المشتقة الأولى
لتريك أنه لا يوجد قيم قصوى ،
مقعر لأعلى على $(-\infty,0)$
و $(2,\infty)$ ، مقعر لأسفل
على $(0,2)$ ، الإحداثيات
x لنقط الانقلاب هي 0 و 2.



ب) بما أن $f''(0)-2<0$
، عظمى $f(0)=1 \to$
التقعر لأعلى على $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$
وعلى $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3},\infty\right)$
- التقعر لأسفل على $\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3},\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$
- الإحداثيات x لنقط الانقلاب هي $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$



29) عظمى : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ ، $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$
صغرى : $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$



(30
y
x
3
2
1
-2
-1
1
2
31) (أ)
(ب)
(جـ)
y = x − 1
x = −3
-4
2
(−8/3)
y = 1/3
x = 5/3
عظمى : f(0) = 0
لا يوجد قيم قصوى
(3 − √7, 037)
(3.0)
عظمى : f(3 + √7) ≈ 0.08 ، صغرى : f(3 − √7) ≈ 0.37

32) 2.27

34) 125 متر×250 متر

35) نصف قطر نصف الدائرة $\frac{220}{\pi}m$ وطول المستطيل $220m$.

36) أ) استعمل كل السلك للدائرة

ب) استعمل طول $\frac{5\pi}{4+\pi}=2.2$ قدم للدائرة والباقي للمربع.

37) $v(t)=\frac{3(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$ ، $a(t)=\frac{6t(t^2-3)}{(1+t^2)^3}$ ، الحركة لليسار على $[-2,-1)$ إلى اليمين على $(-1,1)$ وإلى اليسار في $(1,2]$.